Nexo Revista Científica
Vol. 25, No. 02, pp. 59-69/Diciembre 2012

ISSN-L 1818-6742

http://www.lamjol.info/index.php/NEXO

Producto de convolución de las derivadas de orden k por las derivadas de orden ℓ de la delta de Dirac soportadas en $(x-1), (x-a)$, y $(x-n)$

Marta García, Manuel A. Aguirre§

Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Tandil, Provincia de Buenos Aires, Argentina
e-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar

(Recibido/received: 24-Septiembre-2012; aceptado/accepted: 06-Noviembre-2012)

RESUMEN

En este artículo, nosotros damos un sentido al producto distribucional de convolución $\delta^{(k)}(x-1)*\delta^{(\ell)}(x-1)$ usando el desarrollo en serie tipo Taylor de $\delta^{(k)}(x-1)$ (c.f. [1]).
Finalmente, se da un sentido a los productos de distribuciones de convolución $\delta^{(k)}(x-n)*\delta^{(\ell)}(x-n)$ y $\delta^{(k)}(x-a)*\delta^{(\ell)}(x-a)$ para n natural y a real.

Palabras Clave: Teoría de distribuciones; propiedades de distribuciones; convolución de distribuciones.

ABSTRACT

In this article we give a sense to distributions convolution product of $\delta^{(k)}(x-1)*\delta^{(\ell)}(x-1)$ using the expansion in series (of Taylor types) of $\delta^{(k)}(x-1)$ (c.f. [1]). Using the Fourier transform of the generalized functions $\frac{(x-1)_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ and $\frac{(x-1)_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}$ in the sense of Gelfand and Shilov ([2]) we obtain the same results. Finaly we give a sense to distributional convolution products of $\delta^{(k)}(x-n)*\delta^{(\ell)}(x-n)$ and $\delta^{(k)}(x-a)*\delta^{(\ell)}(x-a)$ where n and a are natural numbers and real numbers respectively.

Keywords: Theory of distributions, properties of distributions, convolution of distributions.

§ Este trabajo es parcialmente soportado por la Comisión de Investigaciones Científicas de la provincia de Buenos Aires (C.I.C.), Argentina.

INTRODUCCIÓN

Se sabe que las derivadas de orden k de la delta de Dirac soportadas en (x-1) con x real admiten un desarrollo tipo Taylor ([1]).

Usando este resultado se le puede dar sentido al producto de convolución entre las derivadas de orden k y las derivadas de orden l de la delta de Dirac soportadas en (x-1), es decir

$$\delta^{(k)}(x-1) * \delta^{(\ell)}(x-1) \tag{1}$$

Al mismo resultado se arriba usando la transformada de Fourier y trabajando con las funciones generalizadas $\frac{(x-1)_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ y $\frac{(x-1)_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}$ en el sentido de Gelfand y Shilov ([2]).

La fórmula que se obtiene admite extensiones para las delta de Dirac soportadas en (x-n) con n natural y para (x-a) con a real.

PRODUCTO DE CONVOLUCIÓN ENTRE LAS DERIVADAS DE ORDEN k Y LAS DERIVADAS DE ORDEN ℓ DE LA DELTA DE DIRAC SOPORTADAS EN $x-1$

En esta sección, vamos a darle sentido al producto de convolución de $\delta^{(k)}(x-1) * \delta^{(\ell)}(x-1)$ usando el desarrollo en serie tipo Taylor de las derivadas de orden k de la delta de Dirac soportada en $(x-1)$ y también usando la transformada de Fourier.

Sea x una variable real, por $\delta(x-1)$ se define

$$\langle \delta(x-1), \varphi(x) \rangle = \varphi(1) \tag{2}$$

para toda función de prueba $\varphi(x)$ en el espacio D([3],pag.195) ·

Consideremos ahora la función $(x-1)_+^{\lambda-1}$ definida por

$$(x-1)_+^{\lambda-1} = \begin{cases} (x-1)^{\lambda-1} & si \quad x-1>0 \\ 0 & si \quad x-1 \le 0 \end{cases} \tag{3}$$

la cual tiene asociada la función generalizada

$$\left\langle (x-1)_+^{\lambda-1}, \varphi(x) \right\rangle = \int_{(x-1)\ge 0} (x-1)^{\lambda-1} \varphi(x) dx \tag{4}$$

De ([2] , pag. 48) se tiene que la derivada de orden n de la delta de Dirac soportada en $(x-1)$ viene dada por la fórmula,

$$\delta^{(n)}(x-1) = \lim_{\lambda \to -n} \left\{ \frac{(x-1)_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \right\}. \tag{5}$$

donde, $(x-1)_+^{\lambda-1}$ queda definido por (3) y $\Gamma(\lambda)$ es la función Gamma definida por la integral $\int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-x}dx.$

Por otra parte para una función φ en Z, donde Z es el espacio de todas las funciones cuyas transformadas de Fourier son elementos de D ([3], pag.198), vale el siguiente desarrollo asintótico ([1])

$$\delta^{(k)}(x-1)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\delta^{(k+i)}(x) \tag{6}$$

La serie expresada en (6) converge en el sentido de Z', donde Z' es el dual de Z.
En este artículo se pretende darle un sentido al producto de convolución de las derivadas de orden k y las derivadas de orden ℓ de la delta de Dirac soportada en (x - 1),

$$\delta^{(k)}(x-1)*\delta^{(\ell)}(x-1). \tag{7}$$

Teniendo en cuenta que la sucesión

$$g_j=\sum_{i=0}^{j}\frac{(-1)^i}{i!}\delta^{(k+i)}(x) \tag{8}$$

converge a $\delta^{(k)}(x)$ cuando $j\to\infty$, en el sentido de Z' se tiene que,

$$\begin{aligned}\delta^{(k)}(x-1)*\delta^{(\ell)}(x-1) &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\delta^{(k+i)}(x)*\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\delta^{(\ell+j)}(x)\\ &=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\left[\delta^{(k+i)}(x)*\delta^{(\ell+j)}(x)\right]\end{aligned} \tag{9}$$

De (9) y considerando,

$$\delta^{(k+i)}(x)*\delta^{(\ell+j)}(x)=\delta^{(k+i+\ell+j)}(x) \tag{10}$$

([2], Pag. 116)

se tiene,

$$\delta^{(k)}(x-1)*\delta^{(\ell)}(x-1)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\frac{(-1)^i}{i!}\delta^{(k+i+\ell+j)}(x) \tag{11}$$

De (11) y utilizando la fórmula

$$\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}=2^n \tag{12}$$

se tiene,

$$\delta^{(k)}(x-1)*\delta^{(\ell)}(x-1)=\sum_{n\geq 0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^n}{(n-j)!\,j!}\delta^{(k+\ell+n)}(x) \tag{13}$$

$$\delta^{(k)}(x-1) * \delta^{(\ell)}(x-1) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} \delta^{(k+\ell+n)}(x). \tag{14}$$

La fórmula (14), expresa el producto de convolución de las derivadas de orden k y las derivadas de orden ℓ de la delta de Dirac soportada en (x - 1) como un desarrollo en serie.

Es natural preguntarnos si al segundo miembro de (14) le corresponde algun desarrollo tipo Taylor.
En efecto, usando el método dado en Gelfand ([2], pag.48) se tiene la siguiente fórmula,

$$\delta^{(h)}(x-2) = \lim_{\lambda \to -h} \left\{ \frac{(x-2)_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \right\} \quad \text{para}\, h = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

donde,

$$(x-2)_+^{\lambda} = \begin{cases} (x-2)^{\lambda} & si \quad x > 2 \\ 0 & si \quad x \leq 2 \end{cases} \tag{16}$$

De (15) y (16) y usando la fórmula,

$$(1-z)^{\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \quad z^j \tag{17}$$

si $|z| < 1$, donde $\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{j!\,\Gamma(\alpha+1-j)}$, se tiene

$$\delta^{(h)}(x-2) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{2^j}{j!} \lim_{\lambda \to -h} \left\{ \frac{x^{\lambda-j-1}}{\Gamma(\lambda-j)} \right\}. \tag{18}$$

De (18) usando (5) se tiene,

$$\delta^{(h)}(x-2) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{2^j}{j!} \delta^{(h+j)}(x), \tag{19}$$

haciendo $h = k + \ell$ en (19) se arriba a la siguiente fórmula:

$$\delta^{(\ell+k)}(x-2) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{2^j}{j!} \delta^{(\ell+k+j)}(x). \tag{20}$$

De (14) y (20) se obtiene que,

$$\delta^{(k)}(x-1) * \delta^{(\ell)}(x-1) = \delta^{(\ell+k)}(x-2). \tag{21}$$

La fórmula (21) expresa el producto de convolución entre las derivadas de orden k y las derivadas de orden ℓ de la delta de Dirac soportadas en (x-1) como la derivada de orden $(k+\ell)$ de la delta de Dirac soportada en (x-2).

En la próxima sección vamos a obtener la fórmula (21) usando transformada de Fourier.

La fórmula 21 usando la transformada de Fourier

Usando la propiedad que relaciona la convolución con el producto via la transformada de Fourier de dos distribuciones, se tiene que,

$$\left\{\delta^{(k)}(x-1) * \delta^{(\ell)}(x-1)\right\}^{\wedge} = \left\{\delta^{(k)}(x-1)\right\}^{\wedge} \; . \; \left\{\delta^{(\ell)}(x-1)\right\}^{\wedge} \tag{22}$$

([4], pag. 61), donde con el símbolo $^{\wedge}$ indicamos la transformada de Fourier.

Lema

La siguiente fórmula es válida,

$$\left\{\lim_{\lambda\to -k} \frac{(x-1)_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right\}^{\wedge} = \lim_{\lambda\to -k}\left\{\frac{(x-1)_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\right\}^{\wedge} \tag{23}$$

Demostración:

Consideremos una función $\varphi \in Z$ tal que,

$$\{\varphi(x)\}^{\wedge} = \psi(y) = \int e^{ixy}\, \varphi(x)\, dx. \tag{24}$$

En el sentido distribucional se tiene,

$$\begin{aligned}
\left\langle \left\{\delta^{(k)}(x-1)\right\}^{\wedge}, \psi(y)\right\rangle &= \left\langle \delta^{(k)}(x-1), \{\psi(y)\}^{\wedge}\right\rangle \\
&= \left\langle \delta^{(k)}(x-1), \{\varphi(x)\}\right\rangle \\
&= (-1)^k \varphi^{(k)}(x)|_{x=1}
\end{aligned}$$

$$\left\langle \left\{\delta^{(k)}(x-1)\right\}^{\wedge}, \psi(y)\right\rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(1) \tag{25}$$

Por otra parte, tomando en cuenta las características del espacio Z, de (24) se tiene,

$$\varphi(x) = \int e^{-ixy}\, \psi(y)\, dy \tag{26}$$

derivando k veces la fórmula (27)

$$\varphi^{(k)}(x) = \int (-iy)^k\, e^{-ixy}\, \psi(y)\, dy,$$

$$\varphi^{(k)}(x)=(-1)^k\ e^{k\frac{\pi}{2}i}\ \int y^k\ e^{-i\,x\,y}\,\psi(y)\ dy \tag{27}$$

$$\varphi^{(k)}(1)=(-1)^k\ e^{k\frac{\pi}{2}i}\ \int y^k\ e^{-i\ y}\,\psi(y)\ dy \tag{28}$$

$$(-1)^k\varphi^{(k)}(1)=\left\langle e^{k\frac{\pi}{2}i}\ y^k\ e^{-i\ y},\psi(y)\right\rangle \tag{29}$$

De (25) y (30) se tiene la siguiente relación:

$$\left\{\delta^{(k)}(x-1)\right\}^{\wedge}=e^{k\frac{\pi}{2}i}\ y^k\ e^{-i\ y} \tag{30}$$

Por otra parte, la transformada de Fourier de $(x-1)_+^{\lambda-1}$ es,

$$\left\{(x-1)_+^{\lambda-1}\right\}^{\wedge}=ie^{\frac{i(\lambda-1)\pi}{2}}\Gamma(\lambda)(y+0i)^{-\lambda}e^{-i\,y} \tag{31}$$

([2], pag. 171)

$$\frac{\left\{(x-1)_+^{\lambda-1}\right\}^{\wedge}}{\Gamma(\lambda)}=ie^{\frac{i(\lambda-1)\pi}{2}}(y+0i)^{-\lambda}e^{-i\,y} \tag{32}$$

([2], pag. 172)

Usando la fórmula (5) y reemplazando en (33) se tiene,

$$\begin{aligned}\left\{\delta^{(k)}(x-1)\right\}^{\wedge}&=ie^{\frac{i(-k-1)\pi}{2}}(y+0i)^k e^{-i\,y}\\ \left\{\delta^{(k)}(x-1)\right\}^{\wedge}&=e^{-i\,k\frac{\pi}{2}}y^k e^{-i\,y}\end{aligned} \tag{33}$$

donde $i\quad e^{-i\,\frac{\pi}{2}}=i\,(-1)=1,\qquad (y+0i)^k=y^k,\qquad k$ entero no negativo.

Reemplazando en (22) se tiene

$$\begin{aligned}\left\{\delta^{(k)}(x-1)*\delta^{(\ell)}(x-1)\right\}^{\wedge}&=e^{-i\,k\frac{\pi}{2}}y^k e^{-i\,y}.\quad e^{-i\,\ell\frac{\pi}{2}}y^{\ell}e^{-i\,y}\\ &=e^{-i\,(k+\ell)\frac{\pi}{2}}y^{(k+\ell)}e^{-2i\,y}\end{aligned} \tag{34}$$

Aplicando la transformada de Fourier a $\delta^{(k+\ell)}(x-2),$ se obtiene

$$\left\{\delta^{(k+\ell)}(x-2)\right\}^{\wedge}=e^{-i2y}e^{-i\,(k+\ell)\frac{\pi}{2}}y^{(k+\ell)} \tag{35}$$

De (35) y (36) se tiene,

$$\left\{\delta^{(k)}(x-1)*\delta^{(\ell)}(x-1)\right\}^{\wedge}=\left\{\delta^{(k+\ell)}(x-2)\right\}^{\wedge} \tag{36}$$

Aplicando el Teorema de la Unicidad de la transformada de Fourier, de la fórmula (37) se concluye que,

$$\delta^{(k)}(x-1)*\delta^{(\ell)}(x-1)=\delta^{(k+\ell)}(x-2) \tag{37}$$

La fórmula (38) coincide con (21).

LA CONVOLUCIÓN DE $\frac{(x-1)_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}*\frac{(x-1)_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}$

Usando la definición del producto de convolución,

$$\left(f*g\right)=\int_{\Re} f(x-t)g(t)dt \tag{38}$$

para f y g funciones localmente integrables, se tiene ,

$$\begin{aligned}\frac{(x-1)_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}*\frac{(x-1)_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} &=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-1-t)_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\frac{(t-1)_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}dt\\ &=\frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\int_{-\infty}^{\infty}(x-1-t)_+^{\lambda-1}(t-1)_+^{\mu-1}dt\end{aligned} \tag{39}$$

es decir,

$$\frac{(x-1)_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}*\frac{(x-1)_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}=\frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\int_{1}^{x-1}(x-(t+1))_+^{\lambda-1}(t-1)_+^{\mu-1}dt \tag{40}$$

Haciendo el cambio de variable $y=\frac{t-1}{x-2}$,

$$\frac{(x-1)_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}*\frac{(x-1)_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}=\frac{\left(x-2\right)^{\lambda+\mu-1}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\int_0^1 y^{\mu-1}(1-y)^{\lambda-1}dy \tag{41}$$

Usando la fórmula,

$$B(\lambda,\mu)=\int_0^1 t^{(\lambda-1)}(1-t)^{\mu-1}dt=\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)} \tag{42}$$

([2], pag.68).

Y reemplazando en (42) se concluye,

$$\frac{(x-1)_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}*\frac{(x-1)_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}=(x-2)^{\lambda+\mu-1} \tag{43}$$

LA CONVOLUCIÓN DE $\delta^{(k)}(x-n)*\delta^{(\ell)}(x-n)$

Vamos a encontrar una expresión para el producto de convolución entre las derivadas de orden k y las derivadas de orden ℓ de la delta de Dirac soportadas en $(x-n)$ con n natural,

$$\delta^{(k)}(x-n)*\delta^{(\ell)}(x-n) \tag{44}$$

Teniendo en cuenta lo anteriormente probado para el caso de la delta de Dirac soportada en $(x-1)$, se tiene,

$$\delta^{(k)}(x-n) = \lim_{\alpha\to -k}\frac{(x-n)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tag{45}$$

Además,

$$\begin{aligned}\delta^{(k)}(x-n)&=\left\langle (x-n)_+^{\alpha-1},\varphi(x)\right\rangle\\&=\int_{x\geq n}(x-n)^{\alpha-1}\varphi(x)\ dx\end{aligned} \tag{46}$$

donde,

$$(x-n)_+^{\alpha-1}=\begin{cases}(x-n)^{\alpha-1} & si \quad x>n\\ 0 & si \quad x<n\end{cases} \tag{47}$$

Haciendo un cambio de variables $x-n=y$ en (47) se tiene,

$$\delta^{(k)}(x-n)=\int_0^\infty y^{\alpha-1}\varphi(y+n)\ dy \tag{48}$$

Realizando el producto de convolución indicado en (45) aplicando (46),

$$\delta^{(k)}(x-n)*\delta^{(\ell)}(x-n)=\lim_{\alpha\to -k}\frac{(x-n)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}*\lim_{\beta\to -\ell}\frac{(x-n)_+^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \tag{49}$$

$$\delta^{(k)}(x-n) * \delta^{(\ell)}(x-n) = \lim_{\alpha \to -k} \lim_{\beta \to -\ell} \left\{ \frac{(x-n)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \frac{(x-n)_+^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \right\} \tag{50}$$

Usando la fórmula de convolución, de (39) se tiene,

$$\frac{(x-n)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \frac{(x-n)_+^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = \int_n^{x-n} \frac{(x-n-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t-n)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} dt \tag{51}$$

Trabajamos con la integral del 2do. miembro de (52)

$$\int_n^{x-n} \frac{(x-(t+n))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t-n)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} dt \quad , \tag{52}$$

haciendo el cambio de variables $y = \frac{t-n}{x-2n}$ se tiene ,

$$\frac{(x-n)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \frac{(x-n)_+^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = \frac{(x-2n)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy \quad , \tag{53}$$

ahora, considerando la fórmula de la Función Beta (43) ,

$$\frac{(x-n)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \frac{(x-n)_+^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = \frac{(x-2n)_+^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{54}$$

De (55) se concluye que,

$$\delta^{(k)}(x-n) * \delta^{(\ell)}(x-n) = \delta^{(k+\ell)}(x-2n) \tag{55}$$

LA CONVOLUCIÓN $\delta^{(k)}(x-a) * \delta^{(\ell)}(x-a)$

Vamos a encontrar una expresión para el producto de convolución entre las derivadas de orden k y las derivadas de orden ℓ de la delta de Dirac soportadas en $(x-a)$ con a real,

$$\delta^{(k)}(x-a) * \delta^{(\ell)}(x-a) \tag{56}$$

Usando el método de convolución vamos a demostrar la siguiente relación,

$$\frac{(x-a)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \frac{(x-a)_+^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = \frac{(x-2a)_+^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{57}$$

En el 1er. miembro de (58) aplicamos (39),

$$\frac{(x-a)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \frac{(x-a)_+^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = \int_a^{x-a} \frac{(x-a-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t-a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} dt \tag{58}$$

Trabajamos con la integral del 2do. miembro de (59),

$$\int_a^{x-a} \frac{(x-(t+a))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t-a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} dt = \tag{59}$$

y haciendo el cambio de variable $y = \frac{t-a}{x-2a}$,

$$= \int_0^1 \frac{((x-2a)(1-y))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{((x-2a)y)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} (x-2a)dy \tag{60}$$

$$= \frac{(x-2a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy$$

Ahora usando la fórmula (40) se concluye,

$$\frac{(x-a)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \frac{(x-a)_+^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = \frac{(x-2a)_+^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} . \tag{61}$$

Usando que,

$$\delta^{(k)}(x-a) = \lim_{\alpha \to -k} \frac{(x-a)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tag{62}$$

se concluye que para a real vale la siguiente relación,

$$\delta^{(k)}(x-a) * \delta^{(\ell)}(x-a) = \delta^{(k+l)}(x-2a) \tag{63}$$

LA CONVOLUCIÓN $\delta^{(k)}(x-a) * \delta^{(\ell)}(x-b)$

En general podemos darle sentido al producto de convolución,

$$\delta^{(k)}(x-a) * \delta^{(\ell)}(x-b) \qquad a, b \in \Re \tag{64}$$

Para lo cual usando el mismo procedimiento que el usado en la sección anterior, se puede demostrar la relación,

$$\frac{(x-a)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \frac{(x-b)_+^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = \frac{(x-(a+b))_+^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{65}$$

En efecto aplicando la fórmula (39) al 1er. miembro de (66) se tiene,

$$\frac{(x-a)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \frac{(x-b)_+^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = \int_b^{x-a} \frac{(x-a-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t-b)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} dt \tag{66}$$

Haciendo el cambio de variable $y = \frac{b-t}{a+b-x}$ en la integral del 2do. miembro,

$$= \frac{(x-(a+b))^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy \tag{67}$$

teniendo en cuenta la fórmula (43) se concluye,

$$\frac{(x-a)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \frac{(x-b)_+^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = \frac{(x-(a+b))_+^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{68}$$

De (69) y (63) se tiene,

$$\delta^{(k)}(x-a) * \delta^{(\ell)}(x-b) = \delta^{(k+l)}(x-(a+b)). \tag{69}$$

REFERENCIAS

[1] García Marta y Manuel Aguirre - *Asymtotic Expansion and type Taylor Expansion in the Spaces* $S(\Re_+)$, $S_q(\Re_+)$, M_S, Z_q *and* M_Z - Thai Journal of Mathematics . Tailandia. 2004

[2] Gelfand and Shilov - Generalized Functions: Properties and Operations - Academic Press . New York and London . 1964

[3] Zemanian A. H. - Distribution Theory and Transform Analysis . Mc Graw Hill Book Company . New York . 1965

[4] Y Choquet-Bruhat - Distributions: Theorie et problemes . Masson et Cie. Editeurs . 1973

Manuel A. Aguirre, Profesor y Decano

Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro de la Prov. de Buenos Aires
Paraje Arroyo Seco, 7000-Tandil
Provincia de Buenos Aires, Argentina
Tel.: +54 2293 439657
E-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar