Nexo Revista Científica
Vol. 27, No. 01, pp.34-45/Junio 2014

ISSN-E 1995-9516

http://revistas.uni.edu.ni/index.php/Nexo

# LA FAMILIA DE FUNCIONES DISTRIBUCIONALES $B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)$.

# THE DISTRIBUTIONAL FAMILY $B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)$

Manuel A. Aguirre[1] & Marta García
Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada. Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro
Tandil, Provincia de Buenos Aires, Argentina
e-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar

*(recibido/received: 10-Diciembre-2013; aceptado/accepted: 05-Junio-2014)*

## RESUMEN.

En este artículo se introduce la familia de funciones distribucionales $B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)$ definida en (1) y usando laTransformada de Fourier se obtienen propiedades para los casos $\alpha = 0, \alpha = 2k$ y $\alpha = -2k, k = 1, 2,...$ Usando la Transformada de Fourier, $B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)$ puede ser expresada como combinación lineal de $\delta$ y sus derivadas (ver, fórmula (27) y le damos un sentido a la propiedad $B_{-\frac{\alpha}{2}}(x) * B_{-\frac{\beta}{2}}(x)$ (ver, fórmula (44)) donde el símbolo $*$ significa convolución. En la fórmula (33) aparece una nueva expresión para la delta de Dirac $\delta(x)$. Por otra parte, se introduce la familia de funciones distribucionales $M_{-\frac{\alpha}{2}}(x)$ definida en (54) y para $\alpha = 2k, E_k(x)$ (ver, fórmula (62)) es solución elemental del operador $\left(1+\frac{d^2}{dx^2}\right)$ iterado $k$-veces.

Palabras claves: distribuciones; funciones generalizadas; producto de convolución de distribuciones; delta de Dirac.

## ABSTRACT

In this article we introduce the distributional family $B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)$ defined by (1) and using the Fourier Transform we obtain properties for the cases $\alpha = 0, \alpha = 2k$ and $\alpha = -2k, k = 1, 2, \ldots$ Using the Fourier Transform, $B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)$ can be rewritten as lineal combination of $\delta$ and it's derivative (c.f. Formula(27))and we give a sense to propertie of $B_{-\frac{\alpha}{2}}(x) * B_{-\frac{\beta}{2}}(x)$ (c.f. formula(44)) where the symbol $*$ means convolution. In the formula(33) appear a new expression of Dirac´s delta $\delta(x)$.

On the other hand, we introduce the distributional family $M_{-\frac{\alpha}{2}}(x)$ defined by(51) and for $\alpha = 2k, E_k(x)$ (c.f.formula(54)) is elemental solution of the operator $\left(1+\frac{d^2}{dx^2}\right)$ iterated $k-$ times.

Keywords: Distributions; generalized functions; product convolution of distributions; Dirac´s delta.

Clasificación según AMS : 46F10,46F11,46F12.

[1]Este trabajo es parcialmente soportado por la Comisión de Investigaciones Científicas de la provincia de Buenos Aires(C.I.C.),Argentina.

## INTRODUCCIÓN

El propósito de este artículo es introducir la familia de funciones distribucionales $B_\lambda$ definida por (1) y demostrar varias propiedades para diferentes valores del parámetro $\alpha$. Se le da un sentido al producto distribucional de convolución $B_{-\frac{\alpha}{2}}(x) * B_{-\frac{\beta}{2}}(x)$ (ver fórmula (42)). Usando $B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)$ se introduce la familia de funciones distribucionales $M_{-\frac{\alpha}{2}}(x)$ definida por (54) y se obtienen propiedades tales como $M_{-\frac{\alpha}{2}}(x) * M_{-\frac{\beta}{2}}(x)$, $M_{-\frac{\alpha}{2}}(x) * M_{\frac{\alpha}{2}}(x), \left(1+\frac{d^2}{dx^2}\right)^k \{M_k\}$ y además se deduce que $E_k(x)$ (ver fórmula (61)) es solución elemental del operador $\left(1+\frac{d^2}{dx^2}\right)$ iterado $k-veces$.

En primer lugar, usando la transformada de Fourier y tomando en cuenta propiedades de los espacios $O_m$ y $O_c'$, $B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)$ puede ser expresada como una combinación lineal de $\delta$ y sus derivadas (ver (27)), donde $O_m$ es el espacio de funciones de crecimiento lento ([5], página 243) y $O_c'$ es el espacio de distribuciones de rápido decrecimiento ([5], página 244).

En segundo lugar, usando el desarrollo en serie de la función de Bessel de primera clase y usando la definición de la derivada $k-$ésima de la medida de Dirac en $1-y^2$ (ver fórmula (29)), se obtienen fórmulas para $B_{-k}(x)$ (ver fórmula (28)), $B_0(x)$ (ver fórmula (33)) y $B_k(x)$ (ver fórmula (38)).

En tercer lugar se obtiene la fórmula (38), donde $B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)$ puede expresarse en términos del operador $(1+\frac{d^2}{dx^2})^{-\frac{\alpha}{2}}\delta(x)$.

En cuarto lugar se introduce la familia de funciones distribucionales $M_{-\frac{\alpha}{2}}$ definida por (54) y se obtienen fórmulas tales como $M_{-\frac{\alpha}{2}} * M_{-\frac{\beta}{2}} = M_{-\frac{(\alpha+\beta)}{2}}$ (57), $M_{-\frac{\alpha}{2}} * M_{\frac{\alpha}{2}} = M_0 = \delta(x)$ (58) y para el caso $\alpha = 2k$ se obtiene que $E_k$ es solución elemental del operador $L = (1+\frac{d^2}{dx^2})$ iterado $k$ veces.

## LA FAMILIA DE FUNCIONES DISTRIBUCIONALES $B_\lambda(x)$

Sea $x$ un punto en $R$ (conjunto de los números reales) y sea $B_\lambda = B_\lambda(x)$ la familia de funciones distribucionales definida por

$$B_\lambda = B_\lambda(x) = 2^{\lambda+\frac{1}{2}}\sqrt[2]{\pi}\, x^{-\lambda-\frac{1}{2}} J_{\lambda+\frac{1}{2}}(x) \tag{1}$$

donde $J_\lambda(z)$ es la función de Bessel de primera clase definida por

$$J_\lambda(z) = (\frac{z}{2})^\lambda \sum_{\nu\geq 0} \frac{(-1)^\nu (\frac{z}{2})^{2\nu}}{\nu!\Gamma(\lambda+\nu+1)} \quad \text{(ver [1])} \tag{2}$$

y

$$\Gamma(\nu+1) = \nu!. \tag{3}$$

En (2) $\lambda$ es un número complejo y $\Gamma(z)$ es la función gama definida por medio de la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{4}$$

la cual converge para $\mathrm{Re}(z) > 0$ ([6], página 52 y ([2]) página 361), donde $z$ es un número complejo.

Observamos del desarrollo en serie de $J_\mu(x),$ que la familia de funciones distribucionales $B_\lambda(x)$ es una función analítica entera de $\lambda$.

## TRANSFORMADA DE FOURIER DE $B_\lambda(x)$.

Lema: Sea $B_\lambda(x)$ la familia de funciones distribucionales definida en (1) entonces la transformada de Fourier de $B_\lambda(x)$ está dada por medio de la siguiente fórmula

$$?\{B_\lambda(x)\} = \frac{(1-y^2)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$$

donde

$$(1-y^2)_+^\lambda = \begin{cases} (1-y^2)^\lambda \text{ si } 1-y^2 \geq 0 \\ \\ 0 \text{ si } 1-y^2 < 0 \end{cases} \tag{5}$$

para $\lambda \neq -1,-2,-3,..$ y

$$?\{f(x)\} = \int_R e^{-ixy} f(x) dx$$

Demostración: De ([2], página 409, fórmula (9, 2, 14), se tiene la siguiente fórmula

$$J_\nu(x) == \frac{1}{\sqrt[2]{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} . \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{\pm it.x} dt \tag{7}$$

para

$$\mathrm{Re}(\nu + \frac{1}{2}) > 0. \tag{8}$$

Haciendo $\nu = \lambda + \frac{1}{2}$ en (7), se tiene

$$\sqrt[2]{\pi}\, 2^{\lambda+\frac{1}{2}} x^{-\lambda-\frac{1}{2}} J_{\lambda+\frac{1}{2}}(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-t.xi} dt \tag{9}$$

y usando (5) la fórmula (9) puede ser expresada de la siguiente forma

$$\sqrt[2]{\pi}\, 2^{\lambda+\frac{1}{2}} x^{-\lambda-\frac{1}{2}} J_{\lambda+\frac{1}{2}}(x) = \qquad (10)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \int_{-\infty}^{\infty} (1-t^2)_+^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-t.xi} dt.$$

De (10) y usando (1), se tiene la siguiente fórmula,

$$?\{\frac{(1-t^2)_+^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-t^2)_+^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)} e^{-t.xi} dt = \qquad (11)$$

$$= B_{\lambda}(x).$$

La fórmula (11) aparece en ([6], página 185 y ([7], página 2). De (11) y considerando (7), se tiene

$$?\{B_{\lambda}(x)\}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{\lambda}(x) e^{iy.x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(2^{\lambda+\frac{1}{2}} \sqrt[2]{\pi}\, x^{-\lambda-\frac{1}{2}} J_{\lambda+\frac{1}{2}}(x)\right) e^{iyx} dx \qquad (12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)} e^{\pm itx}\right) e^{iy.x} dx.$$

De (12), usando el teorema de Fubini y considerando las fórmulas

$$\delta(t-z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(t-z)} dx$$

y (13)

$$\delta(-t-z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(-t-z)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(t+z)} dx,$$

se obtiene la transformada de Fourier de $B_{\lambda}(x)$:

$$\mathcal{F}\{B_{\lambda}(x)\}(y) = \frac{(1-y^2)_+^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}, \qquad (14)$$

donde $(1-y^2)_+^{\lambda}$ está definida en (5)

Proof De (14), se obtiene la fórmula (5) y de esta manera se completa la demostración.

## EXPRESIÓN DE $B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)$ COMO COMBINACIÓN LINEAL DE $\delta(x)$ Y SUS DERIVADAS

Haciendo $\lambda = -\frac{\alpha}{2}$ en (14), se tiene

$$\mathcal{F}\{B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)\} = \frac{(1-y^2)_+^{-\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} \qquad (15)$$

donde

$$B_{-\frac{\alpha}{2}} = B_{-\frac{\alpha}{2}}(x) = 2^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}}\sqrt[2]{\pi}\, x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}} J_{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}}(x). \tag{16}$$

Tomando en cuenta que,

$$(1-y^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \in O_m, \tag{17}$$

De (5) y (15), se tiene

$$\mathcal{F}\{B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)\} \in O_m \tag{18}$$

donde $O_m$ es el espacio de funciones de crecimiento lento (ver ([5] página 243)).

Por otra parte, de ([5],teorema XV, página 268), se tiene,

$$si\ T \in O_m \Rightarrow \mathcal{F}\{T\} \in O_c' \tag{19}$$

y

$$si\ T \in O_c' \Rightarrow \mathcal{F}\{T\} \in O_m \tag{20}$$

donde $O_c'$ es el espacio de distribuciones de rápido decrecimiento ([5], página 244).

Ahora de (5), (17), (18), y considerando que $O_m \subset S'$ y $O_c' \subset S'$ se tiene

$$B_{-\frac{\alpha}{2}}(x) \in S' \tag{21}$$

donde $S'$ es el dual de $S$ y $S$ es el espacio de Schwartz (ver, ([5]),página 233-234).
Sea $g_j(y)$ la sucesión,

$$g_j(y) = \sum_{\nu=0}^{j} \frac{(-1)^\nu (y)^{2\nu}}{\nu!\Gamma(-\frac{\alpha}{2}-\nu+1)} \tag{22}$$

tal que $g_j(y) \to g(y)$ cuando $j \to \infty$.

Ahora tomando en cuenta el desarrollo en serie binomial de $(1-y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}$, se tiene,

$$\frac{(1-y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \frac{|y|^{2\nu}}{\nu!\Gamma(-\frac{\alpha}{2}-\nu+1)} = g(y) \text{ si } |y|<1, \tag{23}$$

tomando en cuenta $\frac{(1-y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}$ es una función entera de $\alpha$ ,se concluye que la sucesión (22) converge uniformemente en cada conjunto compacto $K \subset R$.

Por tanto, usando ([5] teorema XVI, página 76), la sucesión $g_j(y)$ converge en $D'$ (espacio de distribuciones, ver ([5],página 71)), y por continuidad de la transformada de Fourier se tiene,

$$\mathcal{F}\{\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu y^{2\nu}}{\nu!(m^2)^{\frac{\alpha}{2}+\nu}\Gamma(-\frac{\alpha}{2}-\nu+1)}\} = \mathcal{F}\{\frac{(1-y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})})\} = \mathcal{F}\{g(y)\}$$

$$= \mathcal{F}\{\lim_{j\to\infty} g_j(y)\} = \lim_{j\to\infty} \mathcal{F}\{g_j(y)\}$$

$$= \lim_{j\to\infty} \sum_{\nu=0}^{j} \frac{(-1)^\nu \mathcal{F}\{y^{2\nu}\}}{\nu!\Gamma(-\frac{\alpha}{2}-\nu+1)}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!(m^2)^{\frac{\alpha}{2}+\nu}\Gamma(-\frac{\alpha}{2}-\nu+1)} \mathcal{F}\{(-1)^\nu y^{2\nu}\}. \tag{24}$$

Por otra parte de ([6], página 359), se tiene la siguiente propiedad

$$\mathcal{F}\{\delta^{(2\nu)}(x)\} = (-1)^\nu (y^2)^\nu \tag{25}$$

donde $\nu = 0,1,2,...$ y $\delta^{(2\nu)}(x)$ son las derivadas de orden $2\nu$ de la delta de Dirac definida por

$$\left\langle \delta^{(2\nu)}(x), \varphi \right\rangle = (-1)^{2\nu} \varphi^{(2\nu)}(0). \tag{26}$$

De (5), (4), (24) y (25), $B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)$ puede ser expresada de la siguiente forma

$$B_{-\frac{\alpha}{2}}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\delta^{(2j)}(x)}{j!\Gamma(-\frac{\alpha}{2} - j + 1)}. \tag{27}$$

## PROPIEDADES DE $B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)$

1) Haciendo $\alpha = 2k, k = 0,1,2,...$ en (1) y usando el desarrollo en serie de $J_\mu((x)),$ se tiene,

$$B_{-k}(x) = \sqrt[2]{\pi} \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j x^{2j}}{2^{2j} j!\Gamma(-k + j + 1 + \frac{1}{2})}. \tag{28}$$

Por otra parte tomando en cuenta que

$$\lim_{\alpha\to -k} \frac{(1-x^2)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = \delta^{(k)}(1-x^2) \quad \text{(([7], página 2, fórmula 2),} \tag{29}$$

De (5), se tiene,

$$\mathcal{F}\{B_{-k}(x)\} = \lim_{\alpha\to 2k} \frac{(1-y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} = \lim_{\lambda\to -k-1} \frac{(1-|y|^2)^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)} =$$

$$= \lim_{\beta\to -k} \frac{(1-y^2)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = \delta^{(k)}(1-y^2) \text{ if } |y| < 1. \tag{30}$$

De (29), (30) y usando la definición (6), se obtiene la fórmula

$$\mathcal{F}\{\delta^{(k)}(1-y^2)\} = \frac{1}{2\pi} B_{-k}(x) =$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}}{2\pi} \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j x^{2j}}{2^{2j} j!\,\Gamma(-k+j+1+\frac{1}{2})}. \tag{31}$$

La fórmula (31) aparece en ([7], fórmula 17, página 3).

2) Haciendo $\alpha = 0$ en (27) y usando la fórmula

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin z\pi} \quad \text{([3], página 3)} \tag{32}$$

se tiene

$$\begin{aligned} B_0(x) = B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)\Big|_{\alpha=0} &= \frac{\delta(x)}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}\Big|_{\alpha=0} + \\ + \sum_{v\geq 1} \frac{\delta^{(2j)}(x)}{j!\,\Gamma(-\frac{\alpha}{2}-j+1)}\Big|_{\alpha=0} &= \\ = \delta(x) + \sum_{j\geq 1} \frac{\delta^{(2j)}(x)}{j!\,\Gamma(-j+1)} &= \\ = \delta(x). \end{aligned} \tag{33}$$

Esta propiedad significa que

$$\delta(x) = B_0(x) = \left(\tfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x)$$

3) Haciendo

$$L^{-\frac{\alpha}{2}} = \left(1 + \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}} \tag{34}$$

y usando la fórmula

$$(1-z)^{-\alpha} = \sum_{\nu\geq 0}\binom{-\alpha}{\nu} z^{\nu} \text{ if } |z|<1 \tag{35}$$

donde

$$\binom{-\alpha}{\nu} = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\nu!\Gamma(1-\alpha+\nu)} = \frac{(-1)^{\nu}\Gamma(\alpha+\nu)}{\nu!\Gamma(\alpha)}, \tag{36}$$

y $\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)^{\nu}$ significa

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)^{\nu} = \frac{d^2}{dx^2}(\frac{d^2}{dx^2}(\frac{d^2}{dx^2}...(\frac{d^2}{dx^2}) \tag{37}$$

$\nu -$ veces iteraciones, la fórmula (27) puede expresarse de la siguiente forma

$$\begin{aligned} B_{-\frac{\alpha}{2}}(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})\delta^{(2\nu)}(x)}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})\nu!\Gamma(-\frac{\alpha}{2}-\nu+1)} = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{-\frac{\alpha}{2}}{\nu}\delta^{(2\nu)}(x) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{-\frac{\alpha}{2}}{\nu}\frac{d^{2\nu}}{dx^{2\nu}}\delta(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{-\frac{\alpha}{2}}{\nu}\frac{d^{2\nu}}{dx^{2\nu}}\right)\{\delta(x)\} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}\left(1+\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}}\{\delta(x)\} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} L^{-\frac{\alpha}{2}}\{\delta(x)\}. \end{aligned} \tag{38}$$

Haciendo $\alpha=-2k, k=0,1,2,...$ en (38), se tiene

$$B_k(x) = \frac{1}{\Gamma(1+k)} L^k\{\delta(x)\} = \frac{1}{k!}\left(1+\frac{d^2}{dx^2}\right)^k\{\delta(x)\} \tag{39}$$

Donde

$$\left(1+\frac{d^2}{dx^2}\right)^k = (1+\frac{d^2}{dx^2}(1+\frac{d^2}{dx^2}(1+\frac{d^2}{dx^2}...(1+\frac{d^2}{dx^2}) \tag{40}$$

$k -$ veces iteraciones

De (39) y usando (16) y (2), se tiene

$$\left(1+\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}}\left\{\delta(x)\right\}=\Gamma(1-\tfrac{\alpha}{2})B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)=$$

$$\Gamma(1-\tfrac{\alpha}{2})2^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}}\sqrt[2]{\pi}\,x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}J_{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}}(x)=$$

$$=\Gamma(1-\tfrac{\alpha}{2})\sqrt[2]{\pi}\,x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}\sum_{\nu\geq 0}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!\Gamma(-\frac{\alpha}{2}+1+\nu+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}+2\nu}= \tag{41}$$

$$=\Gamma(1-\tfrac{\alpha}{2})\sqrt[2]{\pi}\sum_{\nu\geq 0}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!\Gamma(-\frac{\alpha}{2}+1+\nu+\frac{1}{2})2^{2\nu}}(-x^2)^{\nu}\text{ if }\alpha\neq 2m, m=1,2,3,\ldots$$

Observe que haciendo $\alpha=0$ en (38), se obtiene la propiedad (33).

## EL PRODUCTO DE CONVOLUCIÓN $B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)*B_{-\frac{\beta}{2}}(x)$.

Tomando en cuenta la fórmula (21) y usando el teorema clásico de L. Schwartz ([5], página 268, fórmula (7, 8, 5), se tiene la siguiente fórmula

$$\mathcal{F}\{B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)*B_{-\frac{\beta}{2}}(x)\}=\mathcal{F}\{B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)\}.\mathcal{F}\{B_{-\frac{\beta}{2}}(x)\} \tag{42}$$

donde el símbolo $*$ significa convolución. De (40) y usando (15), se tiene,

$$\mathcal{F}\{B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)*B_{-\frac{\beta}{2}}(x)\}=$$

$$=\frac{(1-y^2)_+^{-\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}.\frac{(1-y^2)_+^{-\frac{\beta}{2}}}{\Gamma(1-\frac{\beta}{2})}=$$

$$=\frac{(1-y^2)_+^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}}}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2})}.\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2})}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})\Gamma(1-\frac{\beta}{2})}=$$

$$=\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2})}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})\Gamma(1-\frac{\beta}{2})}\mathcal{F}\{B_{-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}}(x)\}. \tag{43}$$

De (43), se obtiene la siguiente propiedad

$$B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)*B_{-\frac{\beta}{2}}(x)=\frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2})}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})\Gamma(1-\frac{\beta}{2})}B_{-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}}(x). \tag{44}$$

En particular, haciendo $\beta = -2k, k = 0,1,2,\ldots$ se tiene

$$B_{-\frac{\alpha}{2}}(x) * B_k(x) = \frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2}+k)}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})\Gamma(1+k)} B_{-\frac{\alpha}{2}+k}(x). \tag{45}$$

De (45) y considerando la propiedad (39), se tiene,

$$B_{-\frac{\alpha}{2}}(x) * \frac{1}{\Gamma(1+k)} L^k\{\delta(x)\} = \frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2}+k)}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})k!} B_{-\frac{\alpha}{2}+k}(x). \tag{46}$$

De (46), se tiene la siguiente propiedad,

$$L^k\left\{B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)\right\} = \left(1+\frac{d^2}{dx^2}\right)^k \left\{B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)\right\} = \frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2}+k)}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} B_{-\frac{\alpha}{2}+k}(x). \tag{47}$$

Observe que usando las fórmulas (32) y (33) y haciendo $\alpha = 2k, k = 1,2,3,\ldots$ en (47), se tiene la propiedad

$$L^k\{B_{-k}(x)\} = \left(1+\frac{d^2}{dx^2}\right)^k \{B_{-k}(x)\} = 0. \tag{48}$$

Por tanto de (48) se concluye que

$$B_{-k} = B_{-k}(x) = \sqrt[2]{\pi} \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j x^{2j}}{2^{2j}\, j!\Gamma(-k+j+1+\frac{1}{2})} \tag{49}$$

es solución homogénea del operador

$$L = 1+\frac{d^2}{dx^2} \tag{50}$$

iterado $k-$ veces. En particular si $k = 1$ , $B_{-1}(x)$ es solución homogénea del operador $L = 1 + \frac{d^2}{dx^2},$ donde

$$B_{-1}(x) = \sqrt[2]{\pi} \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j x^{2j}}{2^{2j}\, j!\Gamma(j+\frac{1}{2})} = \sqrt[2]{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(x). \tag{51}$$

Por tanto de (48), (50) y (51) se concluye que existe una función $y = y(x) = B_{-1}(x)$ tal que

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = -y(x) \tag{52}$$

donde

$$y(x) = B_{-1}(x) = \sqrt[2]{\pi} \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j x^{2j}}{2^{2j}\, j!\Gamma(j+\frac{1}{2})} = \sqrt[2]{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(x). \tag{53}$$

## LA FAMILIA DE FUNCIONES DISTRIBUCIONALES $M_{-\frac{\alpha}{2}}(x)$.

Sea $M_{-\frac{\alpha}{2}} = M_{-\frac{\alpha}{2}}(x)$ la familia de funciones distribucionales definida por

$$M_{-\frac{\alpha}{2}} = M_{-\frac{\alpha}{2}}(x) = a_{-\frac{\alpha}{2}} B_{-\frac{\alpha}{2}}(x) \tag{54}$$

donde

$$a_{-\frac{\alpha}{2}} = \Gamma(1-\frac{\alpha}{2}) \tag{55}$$

y $B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)$ es definida por (1). Observe que usando (33), se tiene

$$M_0 = \delta(x). \tag{56}$$

Por otra parte, usando la propiedad (44), se tiene la siguiente propiedad:

$$M_{-\frac{\alpha}{2}} * M_{-\frac{\beta}{2}} = M_{\frac{-\alpha-\beta}{2}} \text{ para todo } \alpha \text{ y } \beta. \tag{57}$$

En particular haciendo $\beta = -\alpha$ en (57) y usando (56), se tiene,

$$(M_{-\frac{\alpha}{2}} * M_{\frac{\alpha}{2}})(x) = M_0(x) = \delta(x). \tag{58}$$

Por otra parte de (54) y usando (47), se tiene la siguiente propiedad

$$\begin{aligned} L^k\left\{M_{-\frac{\alpha}{2}}\right\} &= L_k^k\left\{a_{-\frac{\alpha}{2}} B_{-\frac{\alpha}{2}}(x)\right\} = a_{-\frac{\alpha}{2}} . \frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2}+k)}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} B_{-\frac{\alpha}{2}+k}(x) = \\ &= a_{-\frac{\alpha}{2}} . \frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2}+k)}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})} . M_{-\frac{1}{2}(\alpha-2k)} a_{-\frac{1}{2}(\alpha-2k)} = M_{-\frac{\alpha}{2}+k}. \end{aligned} \tag{59}$$

En particular haciendo $\alpha = 2k$ en (59), se tiene,

$$L^k\left\{M_{-k}\right\} = M_0. \tag{60}$$

Ahora tomando en cuenta las fórmulas (34), la fórmula (60) puede expresarse en la siguiente forma

$$L^k\left\{M_{-k}\right\} = \left(1+\frac{d^2}{dx^2}\right)^k \left\{M_{-k}\right\} = \delta(x). \tag{61}$$

La propiedad (61), significa que

$$E_k(x) = M_{-k}(x) \tag{62}$$

es solución elemental del operador $L = \left(1+\frac{d^2}{dx^2}\right)$ iterado $k-$ veces, donde

$$M_{-k}(x) = \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j \Gamma(k+j)}{j!\Gamma(k)} \delta^{(2j)}(x). \tag{63}$$

Observe que haciendo $\alpha = -2k, \beta = 2k$ en (57) tenemos

$$(M_k * M_{-k})(x) = M_0(x) = \delta(x) \tag{64}$$

y usando (27) y la fórmula

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-h)} = \frac{(-1)^h \Gamma(-z+h+1)}{\Gamma(1-z)} \quad \text{para h=1, 2,… ([3], página 3)} \tag{65}$$

$M_{-\frac{\alpha}{2}}(x)$ ,puede ser expresada en la siguiente forma

$$M_{-\frac{\alpha}{2}}(x) = \delta(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j . \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2}+j)}{j!\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \delta^{(2j)}(x) \tag{66}$$

y haciendo $\alpha = 2k, k = 1, 2, \ldots$ en (66) se tiene

$$M_{-k} = M_{-k}(x) = \delta(x) + \sum_{j \geq 1} (-1)^j \frac{\Gamma(k+j)}{\Gamma(k)} \delta^{(2j)}(x). \tag{67}$$

Finalmente de (52) y (53), observe que la validez de la siguiente fórmula

$$\frac{d^2}{dx^2}\left( \sqrt[2]{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(x) \right) = \sqrt[2]{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(x). \tag{68}$$

## REFERENCIAS


[1] Watson C.N., ¨A treatise on the theory of Bessel functions¨ 2nd.Ed. Cambridge University Press, 1944.

[2] Schwartz L., Méthodes Mathematiques pour les Sciences Physiques (Métodos matemáticos para las ciencias Físicas), Selecciones Científicas, Madrid, 1969.

[3] Erdélyi,A., ¨Higher Trascendental Functions¨,vol. II, Mc Graw. Hill,New York,1953.

[4]Gradshteyn,I.S. and I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series and products, Academic Press,1980.

[5] Schwartz L., Théorie de distributions, Hermann, París, 1966.

[6] Gelfand,I.M. and Shilov, G.E., Generalized Functions, Volume 1,Academic Press,New York,1964.

[7] García Marta & Aguirre Manuel A., The convolution product of $\delta^{(k)}(1-x^2) * \delta^{(l)}(1-x^2)$, NEXO Revista Científica, Volumen 22, Nro. 02, 2009 http://dx.doi.org/10.5377/nexo.v22i2.45



**Manuel A. Aguirre, Profesor y Decano**
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro de la Prov. de Buenos Aires
Paraje Arroyo Seco, 7000-Tandil
Provincia de Buenos Aires, Argentina
Tel.: +54 2293 439657
E-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar