



DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS GEOMÉTRICOS DE UN MECANISMO PLANO DE CINCO BARRAS MEDIANTE CALIBRACIÓN DE CÁMARA

DETERMINATION OF THE GEOMETRIC PARAMETERS OF A FIVE-BAR PLANAR MECHANISM USING A CAMERA CALIBRATION

Mario A. García-Murillo^{ID}, Ricardo García-García^{*ID}, J. Jesús Cervantes-Sánchez^{ID}, José Antonio Gómez-Zamilpa^{ID}, Cristian Emmanuel Rodríguez-Ramírez^{ID}

Universidad de Guanajuato, Departamento de Ingeniería Mecánica, División de Ingenierías, Salamanca, Guanajuato, México

(recibido/received: 31-mayo-2025; aceptado/accepted: 25-noviembre-2025)

RESUMEN

Este trabajo presenta una metodología novedosa para la determinación de parámetros geométricos en robots y mecanismos, basada en técnicas de calibración de cámara. El método se sustenta en la relación entre los parámetros extrínsecos derivados de la calibración, la reconstrucción de curvas y superficies generadas por el movimiento relativo de los eslabones y la formulación cinemática mediante matrices de transformación. La propuesta permite obtener no solo las dimensiones de los eslabones, sino también la orientación de los ejes de los pares cinemáticos, una información que rara vez se aborda en la literatura. Para demostrar su potencial, el método se aplicó a un mecanismo plano de cinco barras con dos grados de libertad, determinando sus longitudes de trabajo reales y las direcciones de los ejes de sus articulaciones. El sistema de medición requerido es simple de implementar, pues utiliza únicamente una cámara, sin necesidad de sensores adicionales, eslabones auxiliares ni control del robot para posicionarse en múltiples configuraciones.

Palabras clave: Calibración de cámara; Parámetro geométrico; Espacio vértice.

ABSTRACT

This paper presents a novel method for determining the geometrical parameters of a five-bar planar mechanism used for in-plane positioning tasks. The method employs photogrammetry techniques, which require a camera calibration process based on the vertex space concept. A methodology for the characterization of the measurement system is also included in this work. The applicability and advantages of the proposed methodology are demonstrated through the estimation of the geometric dimensions of a five-bar mechanism.

Keywords: Camera calibration; Geometric parameter; Vertex space.

* Autor de correspondencia.
Correo: garciar@ugto.mx

1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas ha aumentado drásticamente el interés por el desarrollo e implementación de robots para asistir y automatizar procesos tales como tareas de maquinado, operaciones de tomar y posicionar, procedimientos de rehabilitación y cirugía médicas, medición de coordenadas, entre otros. Muchas de estas tareas demandan gran precisión, sin embargo, un número elevado de juntas cinemáticas pasivas puede conducir a errores de manufactura y ensamble, y por lo tanto disminuir su precisión. No obstante, este problema se puede reducir con una calibración apropiada de los parámetros geométricos del robot, sin embargo, esta es una tarea complicada desde el punto de vista teórico y experimental (Traslosheros *et al.*, 2011).

Existen varios métodos para determinar los parámetros geométricos de robots y mecanismos. Su clasificación está basada generalmente en la posición de los instrumentos de medición y los elementos auxiliares. Entonces, se definen tres grupos: medición externa, auto-calibración, y calibración mediante movimientos restringidos del robot (Traslosheros *et al.*, 2011). El primer grupo incluye estrategias basadas en la medición de la pose (posición y orientación) del efector final u otros elementos representativos mediante instrumentos externos, tales como máquinas de medición por coordenadas (Ouyang y Jawahir, 1995), sistemas de visión e instrumentos ópticos (Garrido y Trujano, 2019; Bai y Teo, 2003; Zhang y Gao, 2007; Dinham y Fang, 2009), sensores láser (Meng *et al.*, 2003), sistemas de visión usando patrones (Motta *et al.*, 2001), (Kawasumi *et al.*, 2013) o esferas (Traslosheros *et al.*, 2011). En esta misma línea, Arredondo y sus colaboradores (2021) presentó un trabajo relacionado con la calibración de un robot paralelo, centrándose en la búsqueda de los centros de rotación de juntas esféricas unidas a la plataforma móvil y a los correspondientes de los pares universales de la base. Sin embargo, debido a la arquitectura del robot, no se consideran las poses relativas entre eslabones, ni se detalla la normativa empleada para la caracterización metrológica del sistema. Del mismo modo, en las memorias presentadas por García-Murillo *et al.* (2018) se presenta una aplicación similar, sin embargo, no se cuantifican las características del sistema de medición, sirviendo sólo como trabajo de difusión de la técnica.

El segundo grupo está relacionado con auto-calibración, donde el método utilizado calibra el robot automáticamente, incluso durante su operación. Estos incluyen el uso de sensores redundantes (Ecorchard y Maurine, 2005), eslabones redundantes (Chiu y Perng, 2004), entre otros (Lee *et al.*, 2012). Técnicas mejoradas basadas en algunas de las antes mencionadas se pueden encontrar en trabajos recientes, e.g., (Chanrungrameekul *et al.*, 2025) y (Sheng *et al.* 2024).

Finalmente, la idea principal del tercer grupo se basa en que normalmente el número de sensores del robot es igual a su número de grados de libertad, GDL, (Hernández-Martínez *et al.*, 2010). Por lo tanto, si uno o más GDL del mecanismo están fijos o restringidos, la movilidad del sistema resultante será menor que el número de sensores, por lo que el algoritmo de calibración puede realizarse de forma similar a los métodos que utilizan sensores extra o eslabones adicionales, como se demuestra en (Khalil y Besnard, 2002; Rauf y Ryu, 2001; Rauf *et al.*, 2006).

En este trabajo se presenta una metodología novedosa para determinar los parámetros geométricos de mecanismos. Esta utiliza la popular técnica de calibración de cámara propuesta por (Zhang, 2000), basada en observar un patrón plano en diversas posiciones y orientaciones, vea mejoras actuales de este método en (Genovese, 2024). El método tiene la ventaja de requerir solo una cámara y patrones planos, además de que puede ser realizada sin la necesidad de posicionar el robot mediante un sistema de control. Más aún, el método puede ser utilizado para posicionar las dimensiones de eslabones particulares sin desensamblar el mecanismo, lo cual no ocurre en gran parte de las técnicas presentes en la literatura especializada. La formulación de las matrices de calibración, específicamente la de los parámetros extrínsecos, son empleadas para representar desplazamientos relativos, lineales y angulares, entre los eslabones del mecanismo, empleándolas además en la reconstrucción de lugares geométricos relacionados con los parámetros

geométricos del mismo, por ejemplo, las direcciones de los ejes de rotación, su desviación del valor nominal, y las dimensiones de los eslabones que lo conforman.

Los experimentos son realizados para un mecanismo plano de cinco barras con 2-GDL. El resto de este trabajo está organizado como sigue: Sección 2, presenta una breve descripción del mecanismo estudiado; Sección 3, analiza el proceso de calibración y el método de Zhang; Sección 4, introduce el sistema de medición propuesto; Secciones 5 y 6, describen la metodología y sus aplicaciones para calcular los parámetros geométricos del mecanismo descrito en la Sección 1. Finalmente, en la Sección 7 se discuten las conclusiones del trabajo.

2. DESCRIPCIÓN DEL MECANISMO

El robot estudiado es el mecanismo plano de cinco barras o 5-R, donde R indica revoluta, que se muestra en la Figura 1a. Este dispositivo se emplea para posicionar el palpador de un sistema digitalizador de geometría con el cual se pueden obtener las coordenadas de los puntos pertenecientes a contornos de piezas por donde pasa el palpador. Los parámetros geométricos que considera este estudio son las longitudes de los cinco eslabones, L_i , $i = 0, \dots, 4$ y las direcciones de los ejes de la revoluta, n_A , n_B , n_C , n_D , y n_E , que además son nominalmente paralelos entre sí y normales al plano de movimiento del mecanismo. Un esquema del mecanismo plano 5-R con sus parámetros geométricos se muestra en la Figura 1b.

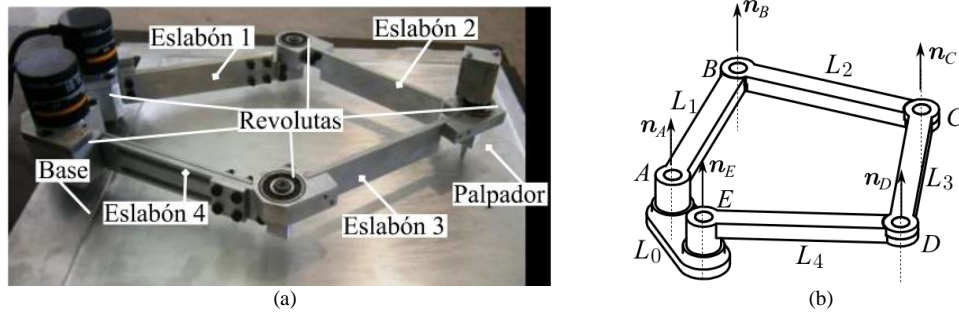


Figura 1. Mecanismo plano de cinco barras. (a) Experimental. (b) Esquemático con parámetros.

Las longitudes de los eslabones, mostradas en la Tabla 1, se obtuvieron utilizando una máquina de medición por coordenadas de la marca MITUTOYO modelo BH-V504, como se muestra en la Figura 2.

Tabla 1. Longitudes de los eslabones del mecanismo, (mm).

Parámetro	Magnitud
L_0	68.4203
L_1	175.408
L_2	175.481
L_3	174.074
L_4	176.917

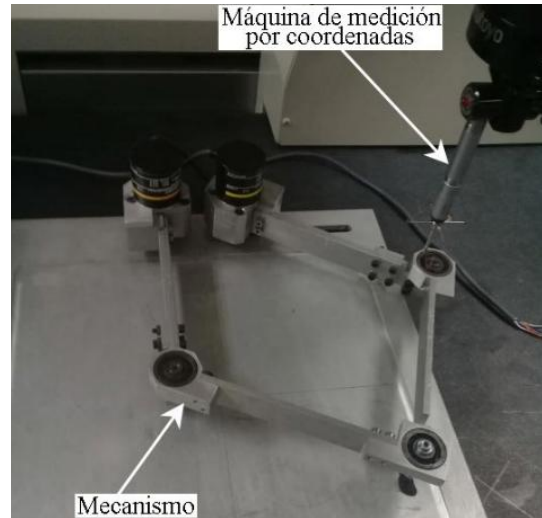


Figura 2. Obtención de las dimensiones del mecanismo mediante una máquina de medición por coordenadas.

3. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA DE MEDICIÓN

Una calibración de cámara consiste en calcular las características geométricas y ópticas de la cámara, las cuales son conocidas como parámetros extrínsecos e intrínsecos, vea la Figura 3. En palabras sencillas, el proceso consiste en extraer información 3D de imágenes 2D. La idea principal detrás del proceso de calibración es describir la matriz que relaciona los sistemas de referencia de la cámara y el mundo real calculando los parámetros intrínsecos: las coordenadas del punto principal, $[u_0, v_0]^T$, los factores de escala α y β de la imagen, los ejes u y v de la imagen, y el parámetro γ , que describe la asimetría de los dos ejes de la imagen; y al calcular los parámetros extrínsecos: el vector de posición t , y la matriz de orientación R , vea la Figura 3.

Normalmente, un sistema de visión requiere más de una cámara para extraer información 3D. Sin embargo, el algoritmo propuesto por (Zhang, 2000) permite realizar este proceso utilizando solo una cámara. En la Figura 3 se muestran los elementos principales considerados en el modelo geométrico de la cámara. El punto M , determinado por el vector $M = [x, y, z]^T$ en el mundo real, tiene un correspondiente punto m cuyas coordenadas en el plano de la imagen son (u, v) .

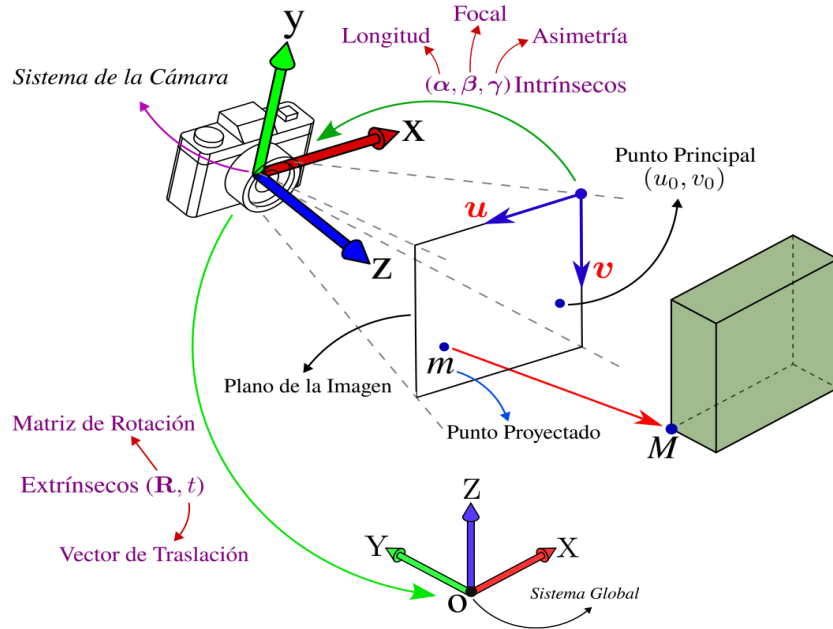


Figura 3. Parámetros extrínsecos e intrínsecos del modelo de cámara.

Entonces, las coordenadas de M tienen dos transformaciones: a) proyección que transforma un punto 3D en un punto 2D de la imagen; b) transformación del sistema de la cámara (en unidades métricas) a el sistema de la imagen (en pixels). Estas dos transformaciones son representadas matemáticamente como sigue:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & u_0 & 0 \\ 0 & \beta & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

La primera matriz del lado derecho de (1) es llamada la matriz de parámetros intrínsecos de la cámara. Por otro lado, la segunda matriz contiene los parámetros extrínsecos, donde R es la matriz de rotación asociada con el sistema de la cámara y un sistema de referencia en el mundo real. Finalmente, t es el vector de traslación entre ambos sistemas de referencia.

El algoritmo de Zhang está basado en el cálculo de la matriz de homografía o de proyección entre el plano del patrón (un arreglo de puntos coplanares) y su imagen en la cámara para n imágenes diferentes. El proceso consiste en utilizar la matriz de homografía para reproyectar los puntos 2D en el espacio 3D. Entonces, el algoritmo vuelve a tomar el arreglo de puntos y compara su posición con los del arreglo del paso previo. Las diferencias resultantes son minimizadas mediante un proceso de optimización no-lineal que utiliza el algoritmo de Levenberg-Marquard. Esta metodología proporciona los mejores parámetros intrínsecos para componer la matriz de homografía final, la cual puede ser usada para extraer los parámetros extrínsecos 3D más precisos de un patrón plano para alguna posición espacial. Este proceso está ilustrado en la Figura 4.

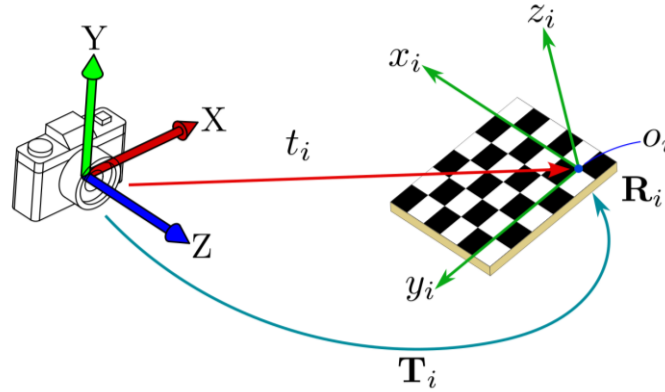


Figura 4. Medición de la pose, $T_i = [R, t]$, de un patrón plano relativo al sistema de la cámara.

4. CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA DE MEDICIÓN

Para asegurar que las mediciones son precisas, es necesario caracterizar el sistema utilizado. Específicamente, se busca determinar el error relativo, repetibilidad y reproducibilidad de las mediciones. Estos parámetros se calcularon basados en la norma (ISO-5725, 1994). El sistema de medición se muestra en la Figura 5. El arreglo experimental está compuesto de los siguientes dispositivos:

- Patrones de calibración con tamaño de cuadro de 10 mm.
- Cámara Genie Nano C2020 de la marca Teledyne.
- Estación de traslación micrométrica de tres ejes.
- Equipo de cómputo, PC.

La discusión anterior sirvió para formular el siguiente procedimiento.

1. Realizar la calibración de cámara utilizando el método presentado en (Zhang, 2000), el cual fue descrito en la sección previa. Los parámetros intrínsecos obtenidos se muestran en la Tabla 2.
2. El patrón se posiciona en la estación micrométrica de 3-ejes. Cada eje es desplazado 2.50 mm con saltos de 0.50 mm a una distancia de 65 cm de la cámara, realizando un barrido completo del espacio tridimensional. Una imagen es tomada para cada posición.
3. El procedimiento es ejecutado por tres diferentes operadores, tres veces cada uno.

Los resultados de la caracterización del sistema de medición se presentan en la Tabla 3.



Figura 5. Configuración del experimento para la caracterización del sistema de medición.

Tabla 2. Parámetros intrínsecos de la cámara.

Parámetro	Valor
Longitud focal	$[1359.0117 \ 1364.7086] \pm [19.5053 \ 19.6984]$
Punto principal	$[363.8465 \ 224.9075] \pm [3.01340 \ 2.0200]$
Distorsión	$[-0.3709 \ -0.5355 \ -0.0007 \ 0.0031 \ 0.0000]$ $\pm [0.0155 \ 0.2217 \ 0.0002 \ 0.0008 \ 0.0000]$
Error en pixel	$[0.0658 \ 0.1014]$

Tabla 3. Características del Sistema de medición.

	Traslación [mm]	Rotación [°]
Error	0.003744	1.43×10^{-4}
Desviación Estándar.	0.001975	2.78×10^{-5}
Repetibilidad	0.008673	0.001327
Reproducibilidad	0.008333	0.001198

5.1. Estudio de la exactitud (veracidad y precisión)

Para la implementación de un sistema de medición, es necesario que este posea una exactitud suficiente para la aplicación prevista. Por este motivo, resulta imprescindible llevar a cabo un estudio de exactitud del sistema empleado en este trabajo, con el fin de demostrar su idoneidad para la aplicación en cuestión.

La norma ISO 5725 (ISO, 1994) emplea dos términos: "veracidad de medida" y "precisión", para describir la exactitud de un sistema de medición. La *veracidad* se refiere a la proximidad entre la media aritmética de un gran número de resultados de prueba y el valor verdadero o aceptado como referencia. Por su parte, la *precisión* alude a la proximidad entre los distintos resultados de prueba.

Diversos factores pueden contribuir a la variabilidad en los resultados de un sistema de medición, entre ellos:

- el operador,

- el equipo utilizado,
- la calibración del equipo,
- el entorno (temperatura, humedad, contaminación del aire, y otros),
- el tiempo transcurrido entre mediciones.

Generalmente, la variabilidad entre mediciones realizadas por diferentes operadores y/o con distintos equipos, y será mayor que la variabilidad observada en mediciones efectuadas por un único operador utilizando el mismo equipo. La veracidad del método de medición puede investigarse comparando el valor de referencia aceptado con los datos resultantes proporcionados por el sistema de medición. Generalmente, la veracidad se expresa en términos de sesgo o error sistemático.

El montaje experimental para el estudio de precisión estuvo compuesto por un patrón planar sometido a movimientos tridimensionales conocidos de 0.2 mm y 0.5 mm, a una distancia de 65 cm de la cámara, bajo condiciones de iluminación controladas (véase la Figura 5). Los movimientos fueron realizados mediante una plataforma micrométrica de tres ejes, modelo MBT16D con una resolución de 1 μm . El experimento abarcó un espacio tridimensional de 0.6 mm y 1.5 mm en cada eje, correspondientes a desplazamientos de 0.2 mm y 0.5 mm, respectivamente.

El sesgo de los resultados experimentales se calculó como el error absoluto mediante la siguiente expresión:

$$E = |x_e - x_r| \quad (2)$$

donde E es el error absoluto, x_e es la medición obtenida experimentalmente y x_r es el valor de referencia. En este estudio, la medición experimental corresponde a los valores obtenidos a partir de las imágenes capturadas por la cámara, mientras que el valor de referencia es el proporcionado por la plataforma micrométrica. Adicionalmente, se calculó la desviación estándar del error según la siguiente expresión:

$$s = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (E_i - \bar{E})^2} \quad (3)$$

Los errores mínimos y máximos se presentan en la Tabla 4. Cabe señalar que el error mínimo se obtiene cuando el patrón se desplaza sobre un plano paralelo al plano de la cámara, mientras que el error máximo ocurre cuando el patrón planar se desplaza de manera perpendicular a dicho plano.

Tabla 4. Errores máximos y mínimos a una distancia de 65 cm.

Dirección	Desplazamiento	Error (mm)	s (mm)
Paralela	0.2	0.0053466	0.0018208
	0.5	0.0037466	0.0019758
Perpendicular	0.2	0.0236775	0.0216883
	0.5	0.0163387	0.0157000

El mismo experimento se realizó a distancias de 50 cm a 80 cm, con incrementos de 10 cm, sin que se observaran cambios significativos en el comportamiento del error.

5.2. Precisión y reproducibilidad

En un escenario ideal, si un mismo material se somete repetidamente a ensayo mediante el mismo método, ya sea por un único operador en el mismo laboratorio utilizando el mismo equipo, o bien por diferentes operadores en distintos laboratorios con equipos que cumplen las especificaciones establecidas, todas las

mediciones obtenidas serían numéricamente idénticas. Sin embargo, no se vive en un mundo perfecto. La repetición de un mismo método de ensayo no siempre produce resultados numéricamente idénticos. Existen pequeñas diferencias entre los resultados debido a variaciones inherentes al propio método de ensayo.

El término general para describir la variabilidad entre mediciones repetidas es precisión. Se distinguen dos condiciones de la precisión, denominadas repetibilidad y reproducibilidad, las cuales han resultado necesarias y, en muchos casos prácticos, útiles para describir la variabilidad de un sistema de medición. La repetibilidad y la reproducibilidad son términos estandarizados adoptados por ASTM [88] y por otras organizaciones de normalización. Generalmente, se expresan en términos de desviaciones estándar. Una interpretación no estadística de estos valores es que representan las diferencias máximas entre dos resultados obtenidos bajo condiciones especificadas que pueden atribuirse a la precisión del método de ensayo.

La *repetibilidad* se refiere a la variabilidad entre resultados de ensayos independientes obtenidos por un mismo operador en el menor intervalo de tiempo posible. La *reproducibilidad* aborda la variabilidad entre resultados de ensayo obtenidos por diferentes operadores. El estudio de precisión consistió en la ejecución del mismo experimento descrito en la sección anterior, realizado por tres operadores distintos, con tres repeticiones cada uno. Las desviaciones estándar de la repetibilidad (s_r) y la reproducibilidad (s_R) se calcularon con base en la norma ASTM 691 [89], de la siguiente manera:

$$s_r = \sqrt{\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p s_i^2} \quad (4)$$

y

$$s_R = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + \frac{s_r^2(n-1)}{n}} \quad (5)$$

donde

- p = número de operadores;
- s_i = desviación estándar del ensayo realizado por cada operador;
- $s_{\bar{x}}$ = desviación estándar de los tres promedios de ensayo;
- n = número de resultados en cada ensayo.

Las desviaciones estándar finales de la repetibilidad y la reproducibilidad calculadas se presentan en la Tabla 5.

Tabla 5. Desviaciones estándar de la repetibilidad y la reproducibilidad.

Repetibilidad	Reproducibilidad
0.00867326	0.00833351

Al revisar los resultados del estudio de exactitud presentados en las Tablas 4 y 5, es posible concluir que el sistema de medición propuesto posee la precisión necesaria para ser empleado en esta aplicación. Además, se sugieren tres recomendaciones básicas para mejorar los resultados experimentales:

- Evitar desplazamientos significativos en la dirección perpendicular al plano de la cámara.
- Realizar un procedimiento de calibración robusto, utilizando un número elevado de imágenes y diversas orientaciones del patrón planar.
- Ejecutar el experimento bajo las mismas condiciones en un intervalo de tiempo reducido.

5. DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO PROPUESTO

La técnica novedosa de identificación de parámetros propuesta en este trabajo está inspirada en el método para obtener los espacios de trabajo con orientación constante de robots (Bonev y Ryu, 2001). Este método busca determinar los espacios vértice que generan los pares cinemáticos del mecanismo, para después calcular sus dimensiones en términos de las coordenadas de los centros de estos espacios.

La idea básica es obtener las coordenadas de varios puntos que yacen en la superficie de cada espacio vértice. Para este fin, el sistema de medición descrito en las secciones 3 y 4 es utilizado e implementado en MatLab (Bouguet, 2004). Enseguida, la reconstrucción de estos espacios tridimensionales se realiza al ajustar los puntos a una geometría mediante el método de mínimos cuadrados.

En primer lugar, se sujetan patrones planos a cada uno de los cuatro eslabones móviles, como se muestra en la Figura 6a. Después, se instala la cámara de manera que esta pueda observar todos los patrones al mismo tiempo, para un rango de movimiento completo. El sistema de medición completo para realizar el experimento se muestra en la Figura 6b.

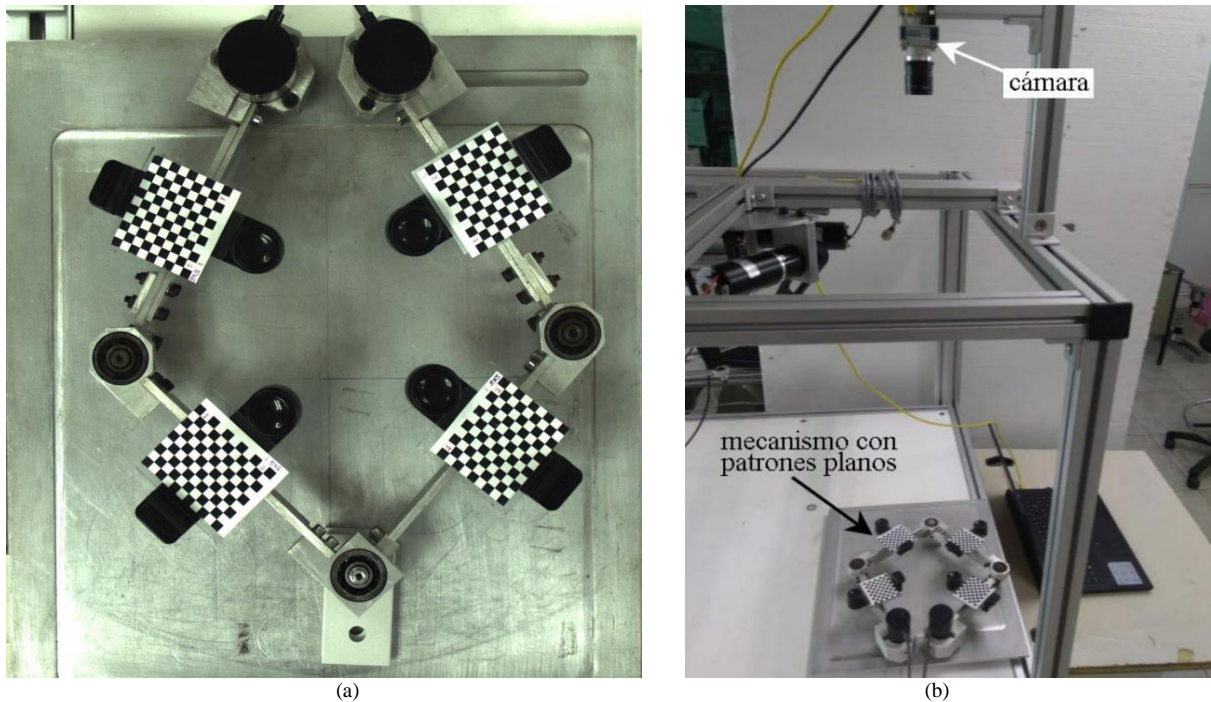


Figura 6. (a) Mecanismo con patrones sujetos a sus cuatro eslabones móviles. (b) Configuración completa del experimento.

La tarea es obtener la dirección y posición de cada uno de los ejes de revoluta, relativos al sistema de la cámara, T_c , para posteriormente encontrar su intersección con el plano de trabajo y de esta forma determinar las dimensiones de trabajo reales de los eslabones del mecanismo. En la Figura 7 se muestra un esquema del mecanismo junto con los cuatro patrones, sus correspondientes sistemas de referencia, T_i , $i = 1, 2, 3, 4$, y el sistema coordenado de la cámara, T_c .

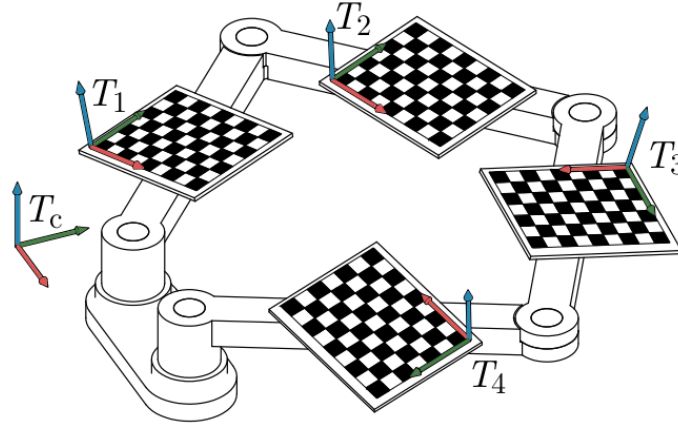


Figura 7. Mecanismo con los cuatro patrones sujetos, sus correspondientes sistemas de referencia, T_i , $i = 1, \dots, 4$, y el sistema coordinado de la cámara.

El experimento se realizó capturando 30 imágenes de 30 posiciones distintas del mecanismo plano. Luego, la extracción de los parámetros extrínsecos de los sistemas de referencia de los patrones para cada punto fue obtenida de las nubes de puntos mostradas en la Figura 8.

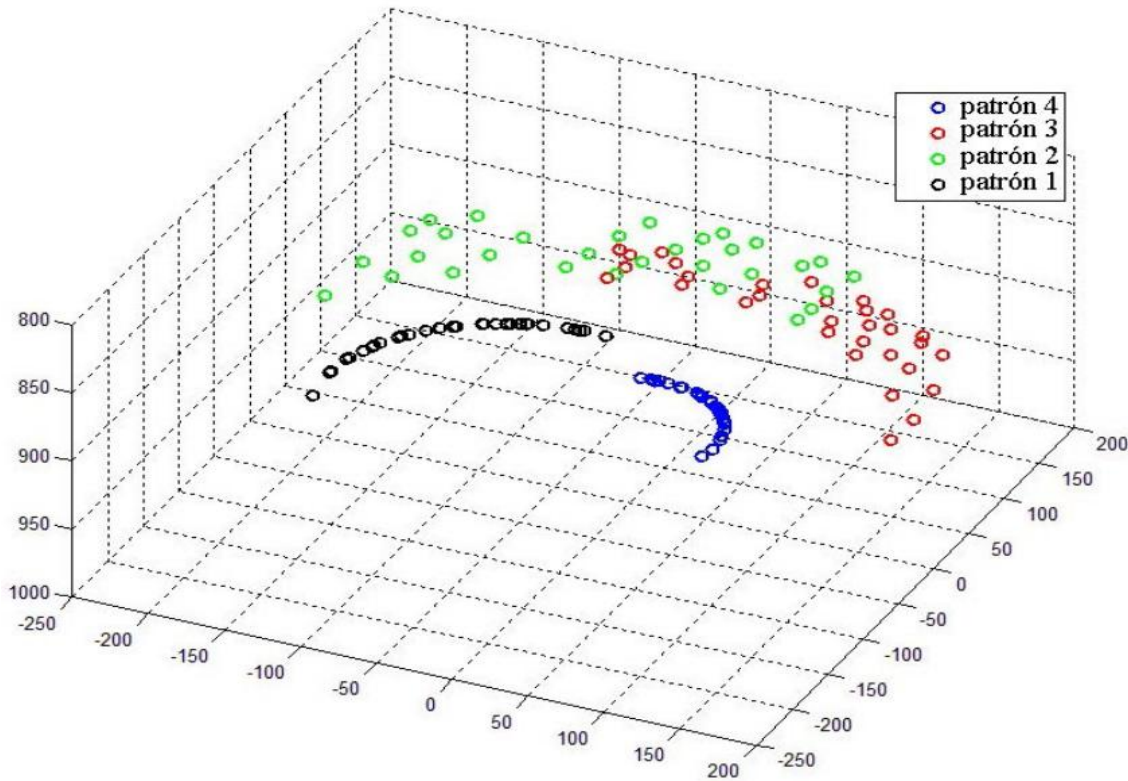


Figura 8. Nubes de puntos generadas por los orígenes de los sistemas de referencia correspondientes a los patrones durante el experimento.

5.1. Análisis para los ejes n_A y n_E

Los espacios vértice de las juntas de revoluta A y E , son circunferencias que yacen en los planos perpendiculares a los ejes n_A y n_E respectivamente; y cuyos centros, ${}^c r_A$ y ${}^c r_E$, definen la posición de

estos mismos ejes, el superíndice “c” indica que estas coordenadas están relativas al sistema de la cámara, T_c . En la Figura 9 se muestran los parámetros necesarios para analizar los ejes de las revolutas A y E .

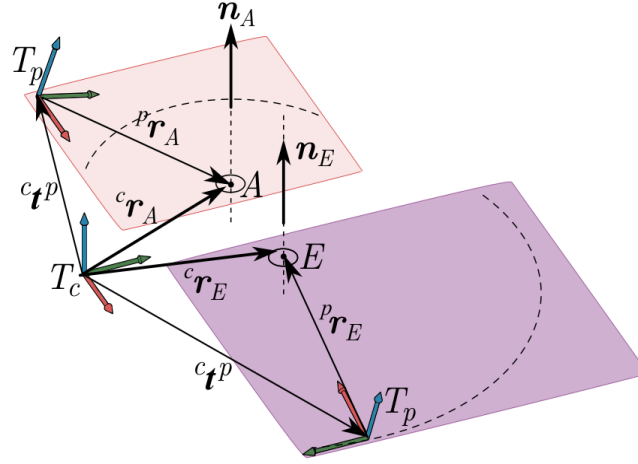


Figura 9. Parámetros necesarios para analizar los ejes n_A y n_E

El origen del sistema coordenado del patrón 1 para la i -ésima imagen, representado por el punto ${}^cO_{1,i}({}^cx_{1,i}, {}^cy_{1,i}, {}^cz_{1,i})$, yace en el perímetro de una circunferencia. El plano que mejor se ajusta a un conjunto de puntos es aquel que minimiza las distancias ortogonales de los puntos al plano (Schomaker *et al.*, 1959), es decir, minimiza la función:

$$E(a, b, c, d) = \sum_{i=1}^n \frac{|ax_i + by_i + cz_i + d|^2}{(a^2 + b^2 + c^2)} \quad (6)$$

Este ajuste desemboca en un problema de descomposición de valor singular en el cual, el plano que mejor se ajusta contiene el centroide de los datos, $c_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y el vector normal es el vector singular correspondiente al valor singular más pequeño de la matriz M definida como:

$$M = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_0 & y_n - y_0 & z_n - z_0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Una vez obtenido el plano, los puntos se proyectan sobre este y se escriben relativos a un nuevo sistema coordenado que yace en el plano, T_p . Entonces, el problema se reduce a encontrar los parámetros de la circunferencia que mejor se ajusta a un conjunto de puntos en el plano. La ecuación de la circunferencia es:

$$({}^px_{1,i} - h)^2 + ({}^py_{1,i} - k)^2 = r_i^2 \quad (8)$$

donde el superíndice “p” indica que los puntos están relativos al sistema del plano T_p , donde r_i es el radio de la circunferencia, y los parámetros h y k son las coordenadas del centro de la circunferencia. El proceso de ajustar una circunferencia a un conjunto de puntos consiste en minimizar las diferencias entre los radios, $r_i - r$, así la función objetivo es:

$$d_i(u) = \sqrt{({}^px_{1,i} - h)^2 + ({}^py_{1,i} - k)^2} - r \quad (9)$$

La ecuación (9) indica que se debe encontrar el centro y el radio de la circunferencia que mejor se ajuste al conjunto de n puntos en el problema de mínimos cuadrados no-lineal descrito como:

$$E(h, k, r) = \sum d_i(u)^2 \quad (10)$$

donde $u = [h, k, r]^T$.

El problema de mínimos cuadrados no-lineal puede ser resuelto con el algoritmo de Gauss-Newton. Este es un procedimiento iterativo donde se requiere una aproximación inicial u_0 . El método consiste en realizar varias iteraciones de acuerdo con el siguiente esquema matemático:

$$u_{s+1} = u_s - (J(u_s)^T(u_s))^{-1} J(u_s)^T d(u_s) \quad (11)$$

donde $J(u)$ es la matriz jacobiana definida por las derivadas parciales de la función $d_i(u)$ con respecto a cada variable objetivo $(h, k, r)^T$, y el vector $d(u)$ contiene las funciones $d_i(u)$ para todos los datos.

Debido a que el centro de la circunferencia ${}^p r_A = [h, k, 0]^T$ está relativo al sistema del plano, T_p , es necesario transformarlo al sistema de la cámara, T_c , vea la Figura 9, lo cual se consigue mediante la siguiente ecuación:

$${}^c r_A = {}^c t^p + [{}^c R^p] {}^p r_A \quad (12)$$

donde ${}^c t^p$ es el vector del origen del sistema en el plano relativo al de la cámara y ${}^c R^p$ es la matriz de orientación del sistema del plano relativo al de la cámara. Nótese que se puede realizar un análisis similar para el eje de la revoluta E .

5.2. Análisis para los ejes n_B , n_C y n_D

Los espacios vértice de las juntas de revoluta B , C , y D también generan circunferencias que yacen en los planos perpendiculares a los ejes n_B , n_C y n_D respectivamente. Sin embargo, estas circunferencias no son relativas al sistema coordenado de la cámara T_c , como se observa en la Figura 8, sino que son relativas al sistema de referencia de cualquier patrón adyacente. Por ejemplo, el origen del sistema coordenado del patrón 3 relativo al sistema de referencia del patrón 4, T_4 , para la i -ésima imagen, representado por el punto ${}^4 O_{3,i}({}^4 x_{3,i}, {}^4 y_{3,i}, {}^4 z_{3,i})$, yace en el perímetro de una circunferencia con centro en ${}^4 r_D$, como se observa en la Figura 10.

La pose de un sistema coordenado, correspondiente a un patrón, relativo a otro, se puede obtener mediante la siguiente transformación:

$${}^i T^j = [T^i]^{-1} T^j \quad (13)$$

donde

$${}^i T^j = \begin{bmatrix} {}^i R^j & {}^i t^j \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz ${}^i R^j$ es la orientación del sistema T_j relativo al sistema T_i , y ${}^i t^j$ es el vector de posición del origen del sistema T_j relativo al T_i .

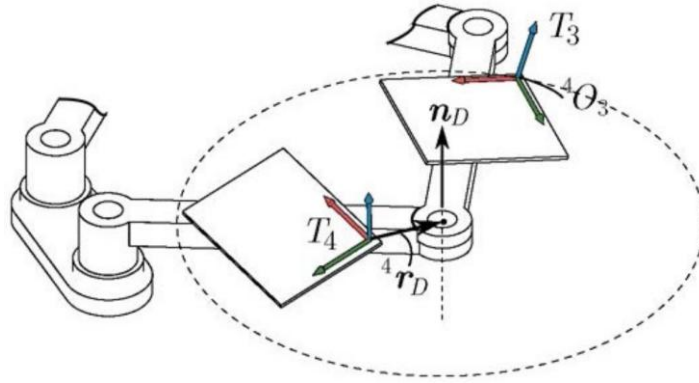


Fig. 10. Circunferencia producida por el movimiento del punto 4O_3 relativo a T_4

Entonces, es posible aplicar el mismo procedimiento descrito en el análisis para los ejes n_A y n_E , y obtener las posiciones de los ejes de revoluta 1r_B , 2r_C , y 4r_D . Nótese que las direcciones de los ejes n_B , n_C y n_D pueden ser obtenidas directamente relativas al sistema de la cámara T_C , al calcular el vector normal del plano que mejor se ajusta a las nubes de puntos de los patrones 2 y 3, mostradas en la Figura 10. Por lo tanto, es necesario determinar los vectores de posición de los ejes de revoluta 1r_B , 2r_C , y 4r_D relativos al sistema de la cámara T_C , mediante las siguientes transformaciones:

$${}^c r_{Bi} = {}^c t_i^1 + [{}^c R_i^1] {}^1 r_B \quad (14)$$

$${}^c r_{Ci} = {}^c t_i^2 + [{}^c R_i^2] {}^2 r_C \quad (15)$$

$${}^c r_{Di} = {}^c t_i^4 + [{}^c R_i^4] {}^4 r_D \quad (16)$$

donde i indica la i -ésima posición de los sistemas de referencia T_1 , T_2 , y T_4 respectivamente, relativos al sistema de la cámara.

6. DIMENSIONES DE TRABAJO REALES DE LOS ESLABONES DEL MECANISMO

Una vez conocida la posición y orientación de todos los ejes de revoluta relativos al sistema de referencia de la cámara, ${}^c r_A$, ${}^c r_{Bi}$, ${}^c r_{Ci}$, ${}^c r_{Di}$, ${}^c r_E$, n_A , n_B , n_C , n_D y n_E , es posible proyectarlos para encontrar su intersección con el plano de trabajo, como se ilustra en la Figura 11, donde se proyectan los ejes de las revolutas A y E . El plano de trabajo se obtiene de ajustar un plano a un conjunto de puntos obtenidos de deslizar un patrón plano por la superficie de la base del mecanismo y capturar imágenes durante el proceso.

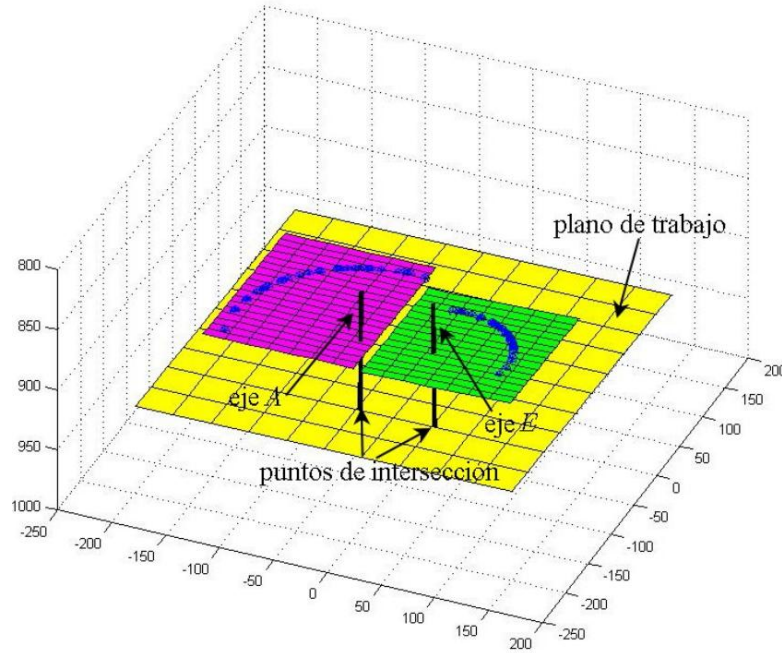


Figura 11. Ejes de las revolutas A y E, intersectando al plano de trabajo del mecanismo.

Las longitudes de trabajo reales de los eslabones se obtienen al calcular las distancias entre los puntos de intersección de los ejes con el plano de trabajo. Debido a que los ejes de las revolutas B, C, y D son móviles, el punto de intersección cambia de posición, y las longitudes de los eslabones L_1 , L_2 , L_3 , y L_4 , se calculan como el promedio de las 30 posiciones del mecanismo. Las longitudes del mecanismo calculadas se presentan en la Tabla 6; se considera como el error en la medición la diferencia entre los valores calculados por este método y las obtenidas con la máquina de medición por coordenadas.

Tabla 6. Longitudes de trabajo reales de los eslabones del mecanismo, (mm).

Parámetro	Magnitud calculada	Error
L_0	68.477	0.0567
L_1	176.001	0.593
L_2	175.532	0.051
L_3	174.841	0.767
L_4	177.320	0.403

7. CONCLUSIONES

En esta contribución se presentó una metodología para determinar los parámetros geométricos de robots y mecanismos, basada en una técnica de calibración de cámara. Para mostrar el potencial de este método, se calcularon las longitudes de trabajo reales de un mecanismo plano de cinco barras con 2-GDL, así como la dirección de los ejes de los pares de revoluta. Esta es una contribución fundamental al estado del arte, ya que en la gran mayoría de trabajos relacionados con la temática, se centran únicamente en determinar las longitudes de los eslabones, mientras que en el presente manuscrito se detalla la metodología para encontrar direcciones asociadas a los pares cinemáticos que conforman el mecanismo. El sistema de medición propuesto es fácil de implementar y requiere una sola cámara, a diferencia de otros métodos donde se necesita de sensores adicionales o de instalar eslabones extra, y en contraste con dichas técnicas, la propuesta en este trabajo permite conocer fácilmente parámetros como ejes asociados al movimiento relativo entre eslabones. Hasta donde los autores de este trabajo conocen, la correlación entre los parámetros extrínsecos

obtenidos de la calibración de cámaras, la reconstrucción de superficies y curvas generadas por el movimiento relativo de los eslabones, y las relaciones cinemáticas dadas por las matrices de transformación asociadas al mecanismo construyen una técnica elegante y original. La metodología es flexible y puede adaptarse a un gran número de sistemas mecánicos.

Además, no es necesario posicionar el robot mediante un sistema de control ni implementar un algoritmo que requiera de un gran número de poses para determinar los parámetros geométricos del mecanismo. Sin embargo, la implementación exitosa depende de que el usuario sea capaz de montar los patrones planos sobre los eslabones del mecanismo, y que su rango de movimiento permita tomar suficientes fotografías para contar con información para la reconstrucción de los lugares geométricos de los puntos de interés.

Por otro lado, en este artículo se presentó de forma detallada la caracterización metrológica del sistema de medición. El lector puede notar que las normas internacionales empleadas están desarrolladas para sistemas de medición en laboratorios en general, por lo que para este trabajo fue fundamental determinar la capacidad de medición del sistema, un apartado no tan común en trabajos relacionados. La caracterización del sistema de medición demostró que cuenta con buena precisión y confiabilidad para determinar los parámetros geométricos del mecanismo analizado. Los resultados obtenidos en este trabajo permiten visualizar el potencial de la metodología propuesta, para el análisis de mecanismos con arquitecturas más complejas tales como robots seriales espaciales, plataformas paralelas, robots móviles, exoesqueletos, por nombrar algunos.

CONTRIBUCIÓN DE AUTORÍA CRediT

Mario A. García Murillo

Conceptualización.

Metodología.

Análisis formal.

Investigación.

Revisión y Edición.

Administración del proyecto.

Ricardo García-García

Metodología.

Verificación.

Investigación.

Redacción - Borrador Original.

J. Jesús Cervantes-Sánchez

Validación.

Verificación.

Investigación.

Revisión y Edición.

Antonio Gómez-Zamilpa

Software.

Programación.

Cristian Emmanuel Rodríguez-Ramírez

Software.

Programación.

DECLARATORIA DE USO DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL EN ESTE DOCUMENTO

Los autores declaran que no usaron herramienta(s) de inteligencia artificial (IA) para generar el contenido en ninguna sección de este documento.

DECLARACIÓN DE INTERESES CONTRAPUESTOS

Los autores declaran que no tienen intereses financieros en conflicto ni relaciones personales conocidas que pudieran haber influido en el trabajo presentado en este artículo.

DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los conjuntos de datos generados y/o analizados durante el estudio actual están disponibles del autor correspondiente a solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Los tres primeros autores desean agradecer el apoyo recibido por el Sistema Nacional de Investigadoras e Investigadores, SNII, de México. Los autores siguientes desean agradecer el patrocinio de la Secretaría de Ciencias, Humanidades, Tecnología e Innovación, SECIHTI, de México.

REFERENCIAS

Arredondo-Soto, M., García-Murillo, M.A., Cervantes-Sánchez, J.J., Torres, F. J., & Moreno-Avalos, H. A. (2021). Identification of geometric parameters of a parallel robot by using a camera calibration technique. *J Mech Sci Technol* 35, 729–737.

Bai, S., & Teo, M. Y. (2003). Kinematic calibration and pose measurement of a medical parallel manipulator by optical position sensors. *Journal of Robotic Systems*, 20(4), 201-209.

Bonev, I. A., & Ryu, J. (2001). A geometrical method for computing the constant-orientation workspace of 6-PRRS parallel manipulators. *Mechanism and machine theory*, 36(1), 1-13.

Bouguet, J. Y. (2004). Camera calibration toolbox for matlab. http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/.

Chanrungrameekul, P., Chen, Y., Grace, J. T., Dollar, A. M., & Hang, K. (2025). ARC-Calib: Autonomous Markerless Camera-to-Robot Calibration via Exploratory Robot Motions. *arXiv preprint* arXiv:2503.14701.

Chiu, Y. J., & Perng, M. H. (2004). Self-calibration of a general hexapod manipulator with enhanced precision in 5-DOF motions. *Mechanism and Machine Theory*, 39(1), 1-23.

Dinham, M., & Fang, G. (2009, December). A low cost hand-eye calibration method for arc welding robots. In *2009 IEEE international conference on robotics and biomimetics (ROBIO)* (pp. 1889-1893). IEEE.

Ecorchard, G., & Maurine, P. (2005, August). Self-calibration of delta parallel robots with elastic deformation compensation. In *2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (pp. 1283-1288). IEEE.

García-Murillo, M.A., Espinosa, S., Reveles-Arredondo, JF, Aguilera-Gómez, E. “Identificación de parámetros geométricos de un mecanismo de 5 barras por medio de un método de calibración de cámaras”, in *Memorias del XXIV Congreso Internacional Anual de la SOMIM 19 Al 21 De Septiembre De 2018* Campeche, Campeche, México.

Garrido, R., & Trujano, M. A. (2019). Stability analysis of a visual PID controller applied to a planar parallel robot. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 17, 1589-1598.

Genovese, K. (2024). Single-image camera calibration with model-free distortion correction. *Optics and Lasers in Engineering*, 181, 108348.

Hernández-Martínez, E. E., López-Cajún, C. S., & Jáuregui-Correa, J. C. (2010). Calibration of parallel manipulators and their application to machine tools. A state of the art survey. *Ingeniería, investigación y tecnología*, 11(2), 141-154.

International Organization for Standardization. (1994). *Accuracy (trueness and precision) of measurement methods and results—Part 1: General principles and definitions (ISO 5725-1:1994)*. <https://www.iso.org/obp>.

Kawasumi, S., Takeda, Y., Castillo, E. C., & Matsuura, D. (2013, January). Compliance Analysis of 3-RPSR Parallel Mechanism for Movable-Die Drive Mechanism of Pipe Bender. In *IFTToMM International Symposium on Robotics and Mechatronics*. Research Publishing Services.

Khalil, W., & Besnard, S. (2002). Self calibration of Stewart-Gough parallel robots without extra sensors. *IEEE Transactions on robotics and automation*, 15(6), 1116-1121.

Lee, H. K., Choi, K., Park, J., & Myung, H. (2012). Self-calibration of gyro using monocular SLAM for an indoor mobile robot. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 10(3), 558-566.

Meng, G., Tiemin, L., & Wensheng, Y. (2003, October). Calibration method and experiment of Stewart platform using a laser tracker. In *SMC'03 Conference Proceedings. 2003 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. Conference Theme-System Security and Assurance (Cat. No. 03CH37483)* (Vol. 3, pp. 2797-2802). IEEE.

Motta, J. M. S., De Carvalho, G. C., & McMaster, R. S. (2001). Robot calibration using a 3D vision-based measurement system with a single camera. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 17(6), 487-497.

Ouyang, J. F., & Jawahir, I. S. (1995). Ball array calibration on a coordinate measuring machine using a gage block. *Measurement*, 16(4), 219-229.

Rauf, A., & Ryu, J. (2001). Fully autonomous calibration of parallel manipulators by imposing position constraint. In *Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 01CH37164)* (Vol. 3, pp. 2389-2394). IEEE.

Rauf, A., Pervez, A., & Ryu, J. (2006). Experimental results on kinematic calibration of parallel manipulators using a partial pose measurement device. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(2), 379-384.

Sheng, L., Zhao, X., Fan, Y., Xue, L., & Tao, B. (2024, July). Kinematic Calibration Method Based on Point Cloud Measurement for 3-RPS Parallel Robot. In *International Conference on Intelligent Robotics and Applications* (pp. 95-107). Singapore: Springer Nature Singapore.

Schomaker, V., Waser, J., Marsh, R. T., & Bergman, G. (1959). To fit a plane or a line to a set of points by least squares. *Acta crystallographica*, 12(8), 600-604.

Traslosheros, A., Sebastián, J. M., Castillo, E., Roberti, F., & Carelli, R. (2011). A method for kinematic calibration of a parallel robot by using one camera in hand and a spherical object. In *2011 15th International Conference on Advanced Robotics (ICAR)* (pp. 75-81). IEEE.

Zhang, Y., & Gao, F. (2007, April). A calibration test of Stewart platform. In *2007 IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control* (pp. 297-301). IEEE.

Zhang, Z. (2000). A flexible new technique for camera calibration. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 22(11), 1330-1334.