



MECHATRONIC DEVICE BASED ON A PARALLEL RECONFIGURABLE MECHANISM FOR ANKLE REHABILITATION

DISPOSITIVO MECATRÓNICO BASADO EN UN MECANISMO PARALELO RECONFIGURABLE PARA LA REHABILITACIÓN DE TOBILLO

Erick Daniel Flores-Salazar¹, Manuel Arias-Montiel², * Esther Lugo-González²

¹División de Estudios de Posgrado, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México

²Instituto de Electrónica y Mecatrónica, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México

(recibido/received: 11-agosto-2025; aceptado/accepted: 15-abril-2026)

ABSTRACT

This work presents the design, construction, and integration of a mechatronic device for ankle rehabilitation. The design is based on a parallel reconfigurable mechanism to be able to execute the three ankle movements with only two actuators. The design and integration of a graphical user interface which allows the device operation is shown too. The rehabilitation robot can execute flexion/extension and adduction/abduction movements in the first operation mode, and eversion/inversion and adduction/abduction movements in the second one. The obtained range of movement are: 46° for flexion, 30° for extension, 36° for both adduction and abduction, 22° for eversion and 17° for inversion. Experimental tests were carried out to verify the mechanism mobility and to demonstrate its viability to be used in therapies of patients who require passive ankle rehabilitation.

Keywords: Mechatronics; Ankle rehabilitation; Parallel reconfigurable robot.

RESUMEN

En este trabajo se presenta el diseño, la construcción y la integración de un dispositivo mecatrónico para la rehabilitación del tobillo. El diseño se basa en un mecanismo paralelo reconfigurable para ejecutar los tres movimientos del tobillo con solo dos actuadores. Se muestra también el diseño y la integración de una interfaz gráfica que permite la operación del dispositivo. El robot rehabilitador es capaz de ejecutar los movimientos de flexión/ extensión y aducción/ abducción en el primero modo de funcionamiento y de eversion/ inversión aducción/ abducción en el segundo. Los rangos de movimiento alcanzados son: 46° para flexión, 30° para extensión, 36° tanto para aducción como para abducción, 22° para eversion y 17° para inversión. Se realizaron pruebas experimentales con personas sanas para verificar el rango de movimiento del mecanismo y su viabilidad para ser usado en terapias de pacientes que requieren rehabilitación pasiva de tobillo.

Palabras clave: Mecatrónica; Rehabilitación de tobillo; Robot paralelo reconfigurable.

* Corresponding author.

E-mail address: mam@mixteco.utm.mx

1. INTRODUCCIÓN

Las lesiones de miembro inferior en seres humanos son frecuentes y pueden deberse a diversos factores como prácticas deportivas o actividades de la vida diaria. El esguince de tobillo es una lesión importante, se ha reportado que a nivel mundial su incidencia es de un caso por cada 10,000 habitantes y es una de las lesiones más comunes en ligas profesionales de baloncesto y de fútbol americano (Catalán-Rodríguez *et al.*, 2018). De acuerdo con información y datos disponibles del Instituto Mexicano del Seguro Social sobre accidentes y enfermedades de trabajo, anualmente en México se presentan más de 400 mil casos de accidentes laborales, de los cuales 45 mil afectaron el pie o tobillo de los trabajadores durante 2023 (Instituto Mexicano del Seguro Social, 2024). Además, existen varias enfermedades neuromusculares que se asocian con la discapacidad y reducción de la calidad y esperanza de vida para las cuales no existe un tratamiento curativo y requieren de la intervención de la medicina de rehabilitación con la intención de evitar daños más severos o permanentes (Arriaga-Rivera, 2023).

Por lo anterior, es notoria la necesidad del uso de la tecnología para el desarrollo de dispositivos que ayuden a los profesionales de la rehabilitación a atender más eficientemente al creciente número de pacientes. A pesar de que en los últimos 20 años se han desarrollado diversas propuestas para este fin, la robótica de rehabilitación sigue siendo un área de investigación muy activa y en los próximos años se prevé un importante crecimiento en aplicaciones de robots que impacten en la mejora de las funciones motoras y en la calidad de vida de las personas (Zhang *et al.*, 2023)

López *et al.* (2014) presentan un exoesqueleto de dos grados de libertad (GDL) para proporcionar una amplificación en la rodilla y el tobillo del usuario. Los autores expresan que el exoesqueleto también puede usarse en tareas de rehabilitación estática, sin embargo, solo cuenta con un GDL en el tobillo (dorsi/plantar flexión). En (Rosado *et al.*, 2017a) y (Rosado *et al.*, 2017b) se utiliza una estructura de robot paralelo para el desarrollo de ejercicios pasivos y activos de rehabilitación de tobillo. El dispositivo cuenta con 2 GDL y es capaz de realizar los movimientos de dorsi/plantar flexión y de inversión/eversión con un controlador proporcional-integral-derivativo (PID) para el seguimiento de trayectorias. Recientemente, Doroftei *et al.* (2023) exploraron diversas opciones para implementar un mecanismo de 2 GDL en un rehabilitador de tobillo. De acuerdo con los criterios especificados por los autores, eligen mecanismos espaciales de 4 barras para ejecutar los movimientos de dorsi/plantar flexión y de inversión/eversión mediante el rehabilitador de tobillo. De las pruebas realizadas con un paciente, llegan a la conclusión de que el mecanismo principal del robot necesita ser rediseñado para hacer coincidir su centro de rotación con el de la articulación del tobillo del paciente. Meng *et al.* (2023) presentan el desarrollo de un robot para la rehabilitación de tobillo que desarrolla los movimientos de dorsi/plantar flexión y de abducción/aducción. A pesar de que los autores establecen el uso de motores eléctricos sin escobillas para la reducción del consumo de energía, el dispositivo es sobreactuado puesto que cuenta con 2 GDL y 4 motores para su accionamiento.

En los trabajos mencionados en el párrafo anterior, se puede observar que muchos dispositivos desarrollados para la rehabilitación del tobillo se limitan a 2 GDL, mientras que la articulación del tobillo humano presenta 3 GDL. En (Dong *et al.*, 2021), (Shah *et al.*, 2022) y (Zhetenbayev *et al.*, 2022) se presentan revisiones del estado del arte de robots desarrollados con la finalidad de ayudar en las terapias relacionadas con lesiones del tobillo. En estas revisiones se puede apreciar que los robots con 3 GDL cuentan con al menos 3 motores para su accionamiento y que las configuraciones basadas en manipuladores paralelos son las más usadas en el diseño de los mecanismos. Además, se mencionan como áreas de oportunidad en el desarrollo de estos dispositivos, la habilidad para ejecutar movimientos complejos combinando dos o los tres GDL del tobillo, el desarrollo de interfases que permitan una fácil operación apuntando hacia la terapia en casa, la disminución en los costos de los dispositivos y el ahorro de energía en la operación de los mismos. Por lo anterior, en el presente trabajo se presenta el diseño y la construcción de un dispositivo para la rehabilitación del tobillo, que mediante un mecanismo paralelo reconfigurable, es capaz de desarrollar los tres movimientos de rotación del tobillo con sólo dos actuadores. Además, se presenta el desarrollo y la

integración de una interfaz gráfica de usuario para la operación del rehabilitador. Es importante mencionar que el dispositivo puede generar movimientos combinados de dorsi/plantar flexión con inversión/eversión y de dorsi/plantar flexión con abducción/aducción en los rangos completos de movimiento del tobillo humano reportados en (Siegler *et al.*, 1988).

2. DISEÑO CONCEPTUAL

Para generar los tres movimientos de rotación del tobillo, se requiere una base móvil, que al igual que el tobillo humano, rote en el espacio, por lo tanto, se propone utilizar un robot paralelo esférico, ya que este tipo de manipuladores poseen diversas ventajas, tales como la capacidad de rotar en el espacio, velocidades y aceleraciones de operación más altas en comparación con los manipuladores seriales, gran capacidad de carga debido a su alta rigidez y buena precisión (Taghirad, 2013).

Los movimientos que la articulación del tobillo realiza para cumplir sus funciones se pueden apreciar en la Figura 1, y en la Tabla 1 se muestran los intervalos máximos para cada movimiento.

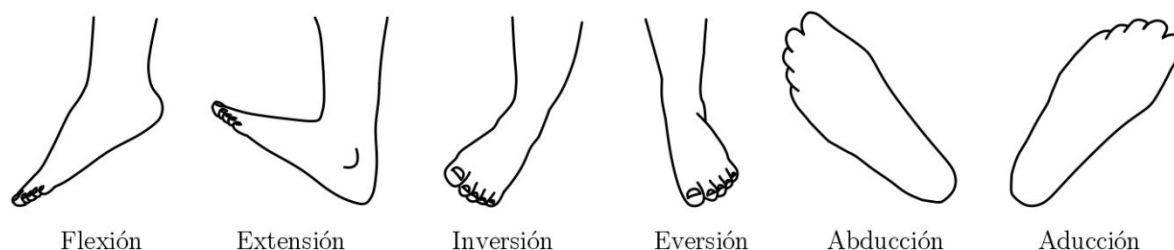


Figura 1. Movimientos del tobillo (Lippert, 2006).

Tabla 1. Intervalos de movimiento del tobillo (Siegler *et al.*, 1988).

Tipo de movimiento	Rango máximo
Dorsiflexión (flexión)	37.6° a 45.8°
Plantarflexión (extensión)	20.3° a 29.8°
Inversión	14.5° a 22.0°
Eversión	10.0° a 17.0°
Abducción	15.4° a 25.9°
Aducción	22.0° a 36.0°

Con base en los criterios de movimiento se propone utilizar una base fija conectada a una plataforma móvil mediante un poste central (ver Figura 2). Para lograr el movimiento angular en el espacio de trabajo de la base móvil es necesario manipular los puntos $B1$ y $B2$ fijos a este cuerpo, por ello se propone que el robot cuente con dos cadenas cinemáticas que muevan dichos puntos.

Con el objetivo de que las dimensiones del robot sean mínimas, se considera que las cadenas cinemáticas tengan un actuador prismático en posición horizontal unido a la base fija, como se muestra en la Figura 3. Adoptando esta configuración es posible maximizar el espacio de trabajo del robot.

Para establecer la configuración de la conexión entre la base móvil y los actuadores prismáticos, se recurre a la ecuación de Grübler:

$$M = 6(N - J - 1) + \sum_{i=1}^J (f_i) - f_p \quad (1)$$

donde M es la movilidad del robot, N es el número de eslabones incluyendo la base fija, J es el número de pares cinemáticos, f_i son los grados de libertad del i -ésimo par y f_p son los grados de libertad en las uniones pasivas.

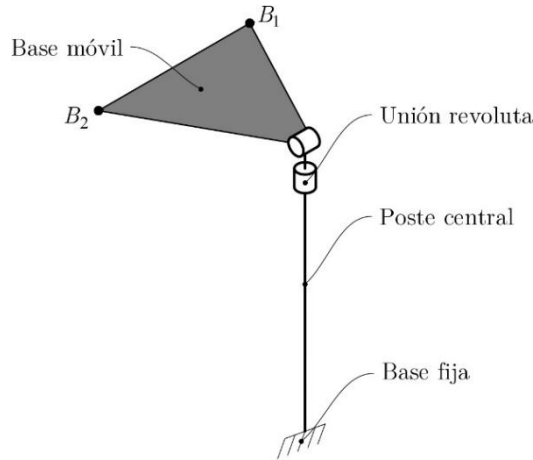


Figura 2. Base móvil unida a poste central.

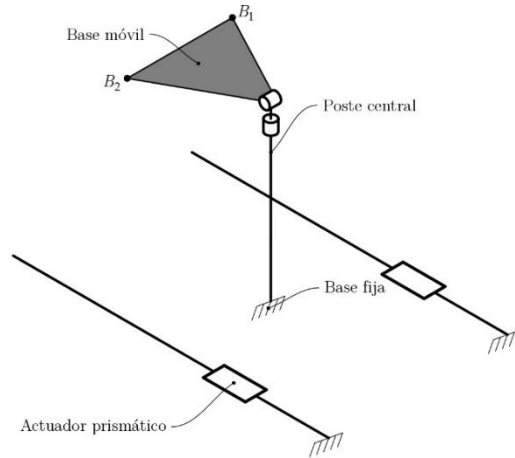


Figura 3. Posición y orientación de los actuadores.

Se propone que el robot sea completamente actuado, por lo que al contar con 2 actuadores su movilidad M tiene que ser igual a 2. Al considerar que dos varillas unen a los actuadores con la base móvil, el número de eslabones del robot N es igual a 6. Para conectar la base móvil con el poste central se requiere de una unión, para conectar los actuadores con la base móvil se requieren dos uniones por cada actuador, por último, los dos actuadores prismáticos conforman dos uniones más, esto da un total de siete uniones, por lo tanto $J = 7$. Sustituyendo estos valores en (1) con $f_p = 0$ y despejando $\sum_{i=1}^J (f_i)$, se obtiene

$$\sum_{i=1}^7 (f_i) = 2 - 6(6 - 7 - 1) = 14 \quad (2)$$

Como el poste central contiene una unión de 2 GDL y cada actuador cuenta con 1 GDL, se tiene que

$$\sum_{i=1}^4 (f_i) = 2 - 6(6 - 7 - 1) - 2 - 2 = 10 \quad (3)$$

Si se consideran dos cadenas cinemáticas iguales para unir los actuadores con la base móvil, cada una deberá de contar con 5 GDL, se propone entonces que cada cadena cinemática cuente con una junta universal y una esférica, con 2 y 3 GDL, respectivamente. En la Figura 4 se muestra la configuración de una cadena cinemática.

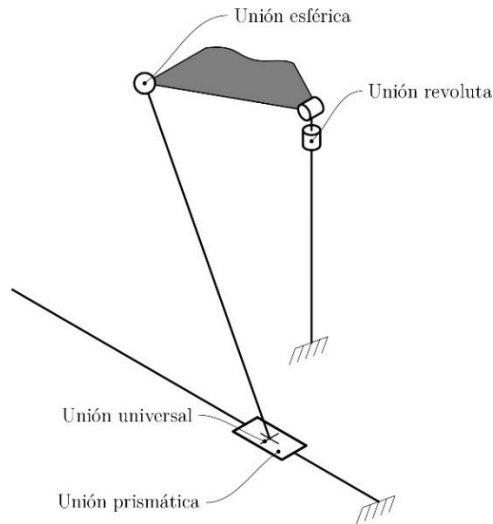


Figura 4. Configuración de las cadenas cinemáticas.

Para que el robot sea capaz de realizar las tres rotaciones del tobillo, la unión entre el poste central y la plataforma móvil se podrá reconfigurar, cambiando la orientación de la unión de revoluta superior. Cada una de estas orientaciones define un modo de operación del robot. Para el primer modo (Figura 5(a)), el robot genera los movimientos de flexión/extensión y de abducción/aducción del tobillo. Para el segundo modo de operación (Figura 5 (b)), el robot realiza los movimientos de inversión/eversión y de abducción/aducción.

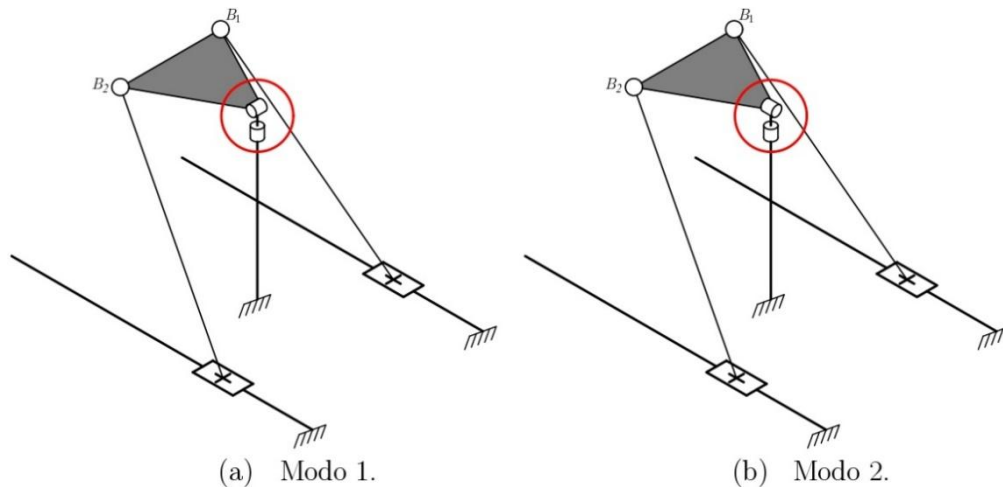


Figura 5. Modos de operación del robot.

El robot paralelo propuesto para la rehabilitación del tobillo tiene 2 GDL y consiste en: dos actuadores prismáticos (correderas lineales), una base fija y una plataforma móvil donde se apoyará el pie del paciente a rehabilitar. La base móvil, mediante los dos modos de operación, proporcionará los movimientos de flexión/extensión, abducción/aducción e inversión/eversión de tobillo. La base fija y la plataforma móvil están conectadas por medio de dos cadenas con configuración PUS (prismática, universal, esférica) más una cadena RR (revoluta, revoluta). El diseño preliminar del robot se muestra en la Figura 6.



Figura 6. Diseño preliminar del robot paralelo para la rehabilitación del tobillo.

3. ANÁLISIS CINEMÁTICO Y SINGULARIDADES

3.1 Cinemática directa de posición

La posición y orientación de cualquier cuerpo rígido en el espacio mediante las coordenadas de tres puntos que le pertenezcan a dicho cuerpo. La posición y la orientación de la base móvil con respecto al marco de referencia fijo O_{XYZ} pueden determinarse calculando las coordenadas de los puntos B_i (ver Figura 7)

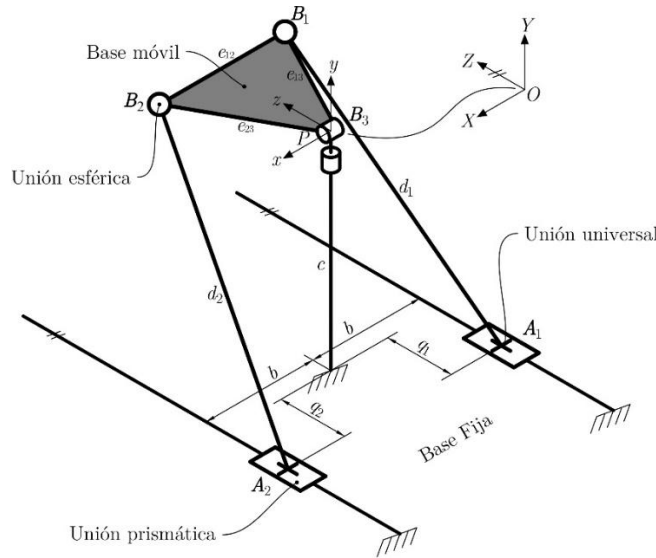


Figura 7. Diagrama cinemático del rehabilitador de tobillo.

Para encontrar las ecuaciones de cerradura de lazo de cada cadena cinemática, se consideran las restricciones mecánicas. Las longitudes de las extremidades del robot están restringidas a

$$(\mathbf{B}_i - \mathbf{A}_i) \cdot (\mathbf{B}_i - \mathbf{A}_i) = d_i^2, \quad i = 1,2 \quad (4)$$

y las tres ecuaciones de compatibilidad para la distancia e_{ij} se pueden expresar como

$$(\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_j) \cdot (\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_j) = e_{ij}^2, \quad j = 2,3; i \neq j \quad (5)$$

donde (\cdot) denota el producto interno usual en álgebra vectorial y \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i y \mathbf{B}_3 están dados por

$$\mathbf{A}_i = [-1^i b \quad -c \quad q_i]^T, \quad \mathbf{B}_i = [X_i \quad Y_i \quad Z_i]^T, \quad \mathbf{B}_3 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (6)$$

El robot paralelo tiene dos modos de operación; en el primer modo la unión de revoluta que une al poste central con la base móvil tiene la dirección del vector $\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1$ (véase Figura 5(a)), esto implica que $Y_2 = Y_1$. Con esta condición y desarrollando (4) y (5), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(X_1 + b)^2 + (Y_1 + c)^2 + (Z_1 - q_1)^2 = d_1^2 \quad (7)$$

$$(X_2 - b)^2 + (Y_1 + c)^2 + (Z_2 - q_2)^2 = d_2^2 \quad (8)$$

$$(X_1 - X_2)^2 + (Z_1 + Z_2)^2 = e_{12}^2 \quad (9)$$

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = e_{13}^2 \quad (10)$$

$$X_2^2 + Y_1^2 + Z_2^2 = e_{23}^2 \quad (11)$$

La solución del problema cinemático directo consiste en encontrar los valores de las coordenadas de los puntos B_1 y B_2 (X_1, X_2, Y_1, Z_1 y Z_2) para valores conocidos de las entradas de movimiento (q_1 y q_2). En (Flores-Salazar *et al.*, 2021) se presenta la solución detallada del sistema de ecuaciones no lineales (7)-(11) mediante los métodos de Newton-Homotopía y la eliminación dialéctica de Sylvester. Se demuestra que, en general, se tienen cuatro posibles soluciones que representan diferentes modos de ensamble del mecanismo, los cuales se muestran en la Figura 8 para los valores de los parámetros geométricos dados en la Tabla 1 y $q_1 = q_2 = -67.0407 \text{ mm}$. De las configuraciones mostradas en la Figura 8, la solución 1 es la que corresponde al modo de ensamble utilizado en este trabajo.

Tabla 2. Parámetros geométricos del robot paralelo.

Parámetro	Valor (mm)
b	85
c	135
d_1	207.5
d_2	207.5
e_{12}	100
e_{13}	100
e_{23}	100

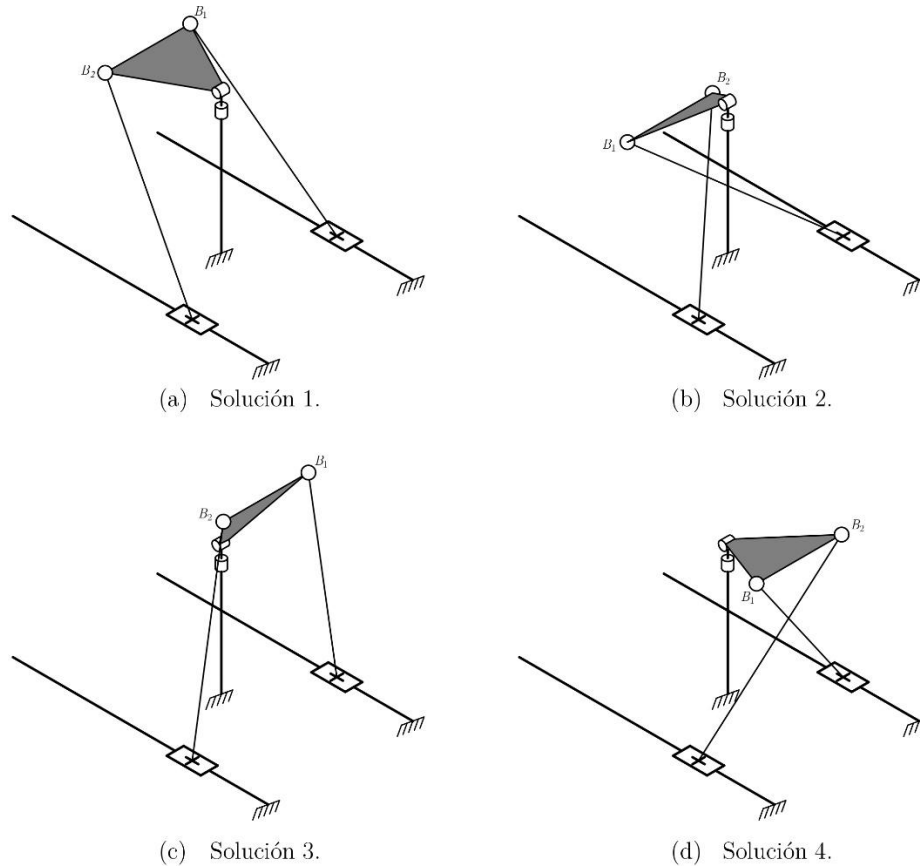


Figura 8. Soluciones de la cinemática directa de posición para el modo 1 (Flores-Salazar *et al.*, 2021).

Se realizó también una simulación en el software ADAMS View para validar el modelo cinemático obtenido. En la Figura 9 se muestra la comparación de los resultados obtenidos mediante la solución del sistema de ecuaciones no lineales (7)-(11) y la simulación del prototipo virtual en ADAMS View para trayectorias del movimiento de entrada dadas por $q_1 = 50\text{sen}(t)$ [mm] y $q_2 = 30\text{sen}(t)$ [mm]. Se observa que las trayectorias obtenidas por ambos métodos son prácticamente idénticas, lo cual valida el modelo cinemático directo de posición del robot paralelo propuesto.

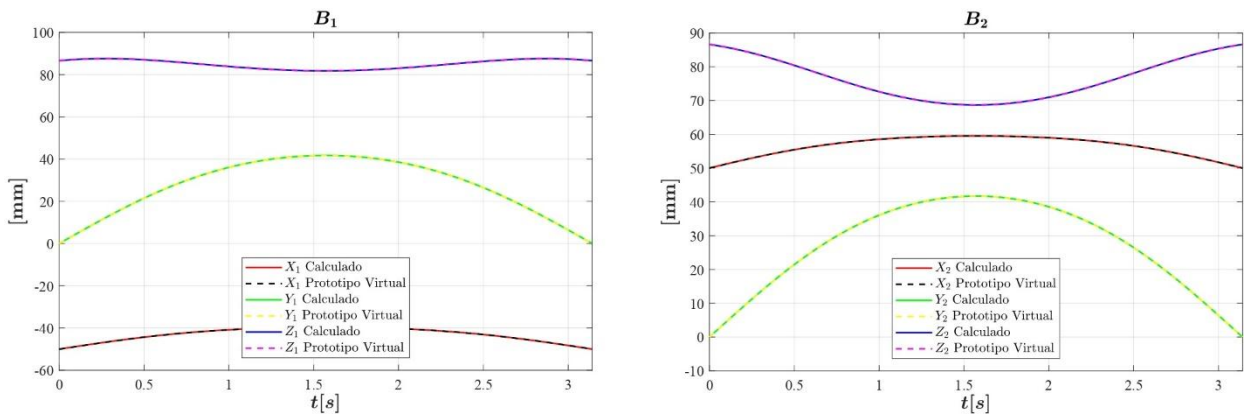


Figura 9. Comparación de resultados para trayectorias de entrada senoidales.

En el segundo modo la unión de revoluta que une al poste central con la base móvil tiene la dirección del vector $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ (véase Figura 5(b)), esto implica que $Y_2 = -Y_1$ y con esta condición, el desarrollo de (4) y (5) lleva a

$$(X_1 + b)^2 + (Y_1 + c)^2 + (Z_1 - q_1)^2 = d_1^2 \quad (12)$$

$$(X_2 - b)^2 + (-Y_1 + c)^2 + (Z_2 - q_2)^2 = d_2^2 \quad (13)$$

$$(X_1 - X_2)^2 + (Z_1 + Z_2)^2 = e_{12}^2 \quad (14)$$

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = e_{13}^2 \quad (15)$$

$$X_2^2 + Y_1^2 + Z_2^2 = e_{23}^2 \quad (16)$$

Resolviendo numéricamente el sistema (12)-(16) siguiendo el mismo procedimiento que para el modo 1 y considerando las mismas entradas de movimiento $q_1 = q_2 = -67.0407 \text{ mm}$, se encuentran seis soluciones posibles (dos repetidas) para la cinemática directa presentadas en la Figura 10, de las cuales la solución 3 (o la 4) corresponden al modo de ensamble considerado en este trabajo.

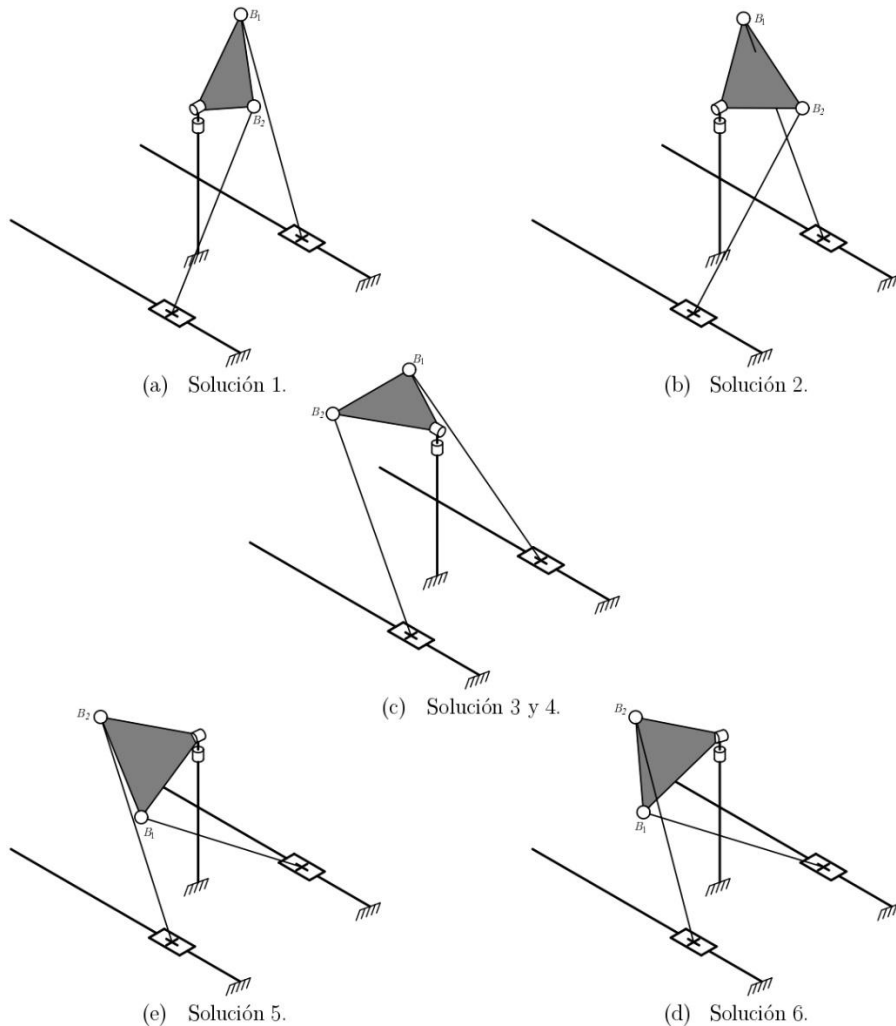


Figura 10. Soluciones de la cinemática directa de posición para el modo 2.

3.2 Cinemática inversa de posición

El problema de la cinemática inversa de posición consiste en encontrar el desplazamiento de las variables q_i dadas las coordenadas de los puntos B_i , que denotan la orientación de la base móvil. Desarrollando los términos de (4) con las definiciones dadas en (6) y despejando q_1 y q_2 se tiene:

$$q_1 = Z_1 \pm \sqrt{-X_1^2 - 2bX_1 - Y_1^2 - 2cY_1 - b^2 - c^2 + d_1^2} \quad (17)$$

$$q_2 = Z_2 \pm \sqrt{-X_2^2 + 2bX_2 - Y_2^2 - 2cY_2 - b^2 - c^2 + d_2^2} \quad (18)$$

donde

$$[X_i \quad Y_i \quad Z_i]^T = \mathbf{R}\mathbf{B}_i \quad (19)$$

y \mathbf{R} es la matriz de rotación sobre el sistema de coordenadas global conformada por las matrices de rotación \mathbf{R}_x , \mathbf{R}_y y \mathbf{R}_z (Tahirad, 2013) de la siguiente forma:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x\mathbf{R}_y\mathbf{R}_z \quad (20)$$

3.3 Cinemática de velocidad

El análisis de velocidad se abordó mediante la teoría de tornillos. Para una explicación detallada de esta metodología, consultar (Gallardo-Alvarado, 2016). Los tornillos se modelan como se muestra en la Figura 11 y se refieren al marco global O_{XYZ} , el tornillo ${}^a\mathcal{S}_i^b$ modela el movimiento del cuerpo b con respecto a un cuerpo a , ambos pertenecientes a la i -ésima cadena cinemática. Las juntas universales se descomponen en dos juntas de revoluta cuyos ejes son perpendiculares entre sí y las juntas esféricas se descomponen en tres juntas de revoluta cuyos ejes son perpendiculares entre sí.

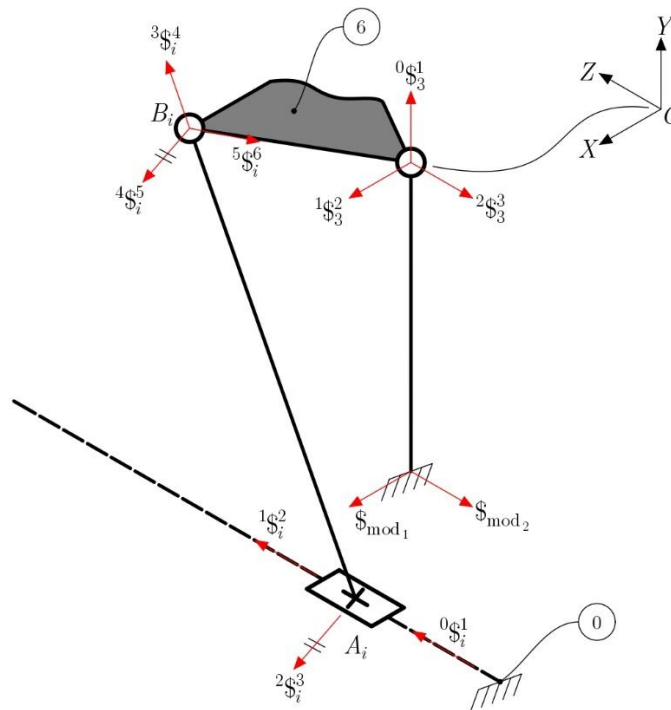


Figura 11. Tornillos de la i -ésima cadena cinemática para el análisis de velocidad.

Los tornillos asociados a todas las uniones se calculan como sigue:

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathcal{S}_i^1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix}; & {}^1\mathcal{S}_i^2 &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}} \\ -\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}_i \end{bmatrix}; & {}^2\mathcal{S}_i^3 &= \begin{bmatrix} {}^2\hat{\mathcal{S}}_i^3 \\ -{}^2\hat{\mathcal{S}}_i^3 \times \mathbf{A}_i \end{bmatrix}; & {}^3\mathcal{S}_i^4 &= \begin{bmatrix} {}^3\hat{\mathcal{S}}_i^4 \\ -{}^3\hat{\mathcal{S}}_i^4 \times \mathbf{B}_i \end{bmatrix}; \\
 {}^4\mathcal{S}_i^5 &= \begin{bmatrix} {}^2\hat{\mathcal{S}}_i^3 \\ -{}^2\hat{\mathcal{S}}_i^3 \times \mathbf{B}_i \end{bmatrix}; & {}^5\mathcal{S}_i^6 &= \begin{bmatrix} {}^5\hat{\mathcal{S}}_i^6 \\ -{}^5\hat{\mathcal{S}}_i^6 \times \mathbf{B}_i \end{bmatrix}; & {}^0\mathcal{S}_3^1 &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; & {}^1\mathcal{S}_3^2 &= \begin{bmatrix} {}^1\hat{\mathcal{S}}_3^2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \\
 {}^2\mathcal{S}_3^3 &= \begin{bmatrix} {}^2\hat{\mathcal{S}}_3^3 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; & \mathcal{S}_{mod1} &= \begin{bmatrix} {}^1\hat{\mathcal{S}}_3^2 \\ {}^1\hat{\mathcal{S}}_3^2 \times c\hat{\mathbf{j}} \end{bmatrix}; & \mathcal{S}_{mod2} &= \begin{bmatrix} {}^2\hat{\mathcal{S}}_3^3 \\ {}^2\hat{\mathcal{S}}_3^3 \times c\hat{\mathbf{j}} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

donde

$${}^3\hat{\mathcal{S}}_i^4 = \frac{\mathbf{B}_i - \mathbf{A}_i}{d_i}, \quad {}^2\hat{\mathcal{S}}_i^3 = \frac{{}^3\hat{\mathcal{S}}_i^4 \times \hat{\mathbf{k}}}{\|{}^3\hat{\mathcal{S}}_i^4 \times \hat{\mathbf{k}}\|}, \quad {}^5\hat{\mathcal{S}}_i^6 = \frac{{}^3\hat{\mathcal{S}}_i^4 \times {}^2\hat{\mathcal{S}}_i^3}{\|{}^3\hat{\mathcal{S}}_i^4 \times {}^2\hat{\mathcal{S}}_i^3\|}, \quad {}^1\hat{\mathcal{S}}_3^2 = \frac{\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1}{e_{12}}, \quad {}^2\hat{\mathcal{S}}_3^3 = \frac{\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2}{\|\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\|}.$$

El estado de velocidad de la base móvil con respecto al marco de referencia fijo, \mathbf{V}_O puede expresarse como un tornillo a través de cualquier cadena cinemática del robot de la forma (Gallardo-Alvarado, 2016):

$$\mathbf{V}_O = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{v}_O \end{bmatrix} = {}_0\omega_1^k {}^0\mathcal{S}_k^1 + {}_1\omega_2^k {}^1\mathcal{S}_k^2 + \dots + {}_5\omega_6^k {}^5\mathcal{S}_k^6 \quad (21)$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es el vector de la base móvil como se observa desde la base fija y \mathbf{v}_O es el vector de velocidad lineal de la base fija del robot.

La ecuación (21) puede expresarse como:

$$\mathbf{V}_O = \mathbf{J}_k \boldsymbol{\Omega}_k \quad (22)$$

donde

$$\mathbf{J}_k = \begin{bmatrix} {}^0\mathcal{S}_k^1 & {}^1\mathcal{S}_k^2 & {}^2\mathcal{S}_k^3 & {}^3\mathcal{S}_k^4 & {}^4\mathcal{S}_k^5 & {}^5\mathcal{S}_k^6 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_k = \begin{bmatrix} {}_0\omega_1^k & {}_1\omega_2^k & {}_2\omega_3^k & {}_3\omega_4^k & {}_4\omega_5^k & {}_5\omega_6^k \end{bmatrix}^T \quad (24)$$

y ${}_a\omega_b^k$ representa la magnitud de la velocidad lineal y angular de un cuerpo b con respecto a un cuerpo a, ambos pertenecientes a la k-ésima cadena $\forall k = 1, 2, 3$. Además, la magnitud de la velocidad ${}_0\omega_1^i$ está relacionada con el i-ésimo par prismático, ${}_0\omega_1^i = \dot{q}_i$.

Usando la teoría de los tornillos recíprocos (Zhao et al., 2009), es posible eliminar de (21) las velocidades de las juntas pasivas de cada cadena cinemática del robot para obtener una relación entrada-salida de velocidades, es decir, la relación entre el estado de velocidad de la plataforma móvil y las velocidades de las juntas actuadas. Con referencia a la Figura 11 y a los establecido por Zhao et al. (2009), se puede demostrar que el tornillo ${}^3\mathcal{S}_i^4$ es recíproco a todos los tornillos asociados con las articulaciones rotatorias (pasivas) en la cadena i, y el tornillo \mathcal{S}_{mod} (para ambos modos de operación) es recíproco a todos los tornillos de la cadena 3. Aplicando la forma de Klein (Gallardo-Alvarado, 2016) a ambos lados de (21), se tiene que:

$$\{\mathbf{V}_O \quad {}^3\mathcal{S}_1^4\} = \dot{q}_1 \{ {}^0\mathcal{S}_1^1 \quad {}^3\mathcal{S}_1^4 \} \quad (25)$$

$$\{\mathbf{V}_O \quad {}^3\$\mathbf{2}^4\} = \dot{q}_2 \{ {}^0\$\mathbf{1}^1 \quad {}^3\$\mathbf{2}^4\} \quad (26)$$

$$\{\mathbf{V}_O \quad \$_{mod}\} = 0 \quad (27)$$

donde $\{ * \quad * \}$ denota la forma de Klein.

Para completar las ecuaciones necesarias para resolver el análisis de velocidad, se considera que, de acuerdo con la movilidad reducida del robot paralelo (tres GDL rotacionales), se pueden escribir las siguientes expresiones (Gallardo-Alvarado et al., 2018):

$$\{\mathbf{V}_O \quad \$_1^r\} = 0 \quad (28)$$

$$\{\mathbf{V}_O \quad \$_2^r\} = 0 \quad (29)$$

$$\{\mathbf{V}_O \quad \$_3^r\} = 0 \quad (30)$$

donde

$$\$_1^r = \begin{bmatrix} \hat{l} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \$_2^r = \begin{bmatrix} \hat{J} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \$_3^r = \begin{bmatrix} \hat{k} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

Pasando a forma matricial el sistema formado por (25)-(30), la ecuación de entrada-salida de velocidad resultante es:

$$\mathbf{A} \mathbf{V}_O = \mathbf{B} \dot{\mathbf{Q}} \quad (31)$$

La matriz \mathbf{A} está dada por $\mathbf{A} = \mathbf{J}^T \Delta$ con $\mathbf{J} = [{}^3\$\mathbf{1}^4 \quad {}^3\$\mathbf{2}^4 \quad \$_{mod} \quad \$_1^r \quad \$_2^r \quad \$_3^r]$, siendo \mathbf{J} la matriz Jacobiana global del robot y Δ un operador de polaridad el cual está definido como en (Gallardo-Alvarao, 2016):

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de 3×3 y $\mathbf{0}$ es una matriz de 3×3 .

La matriz \mathbf{B} es una matriz diagonal dada por:

$$\mathbf{B} = \text{diag}[\{ {}^0\$\mathbf{1}^1 \quad {}^3\$\mathbf{1}^4\} \quad \{ {}^0\$\mathbf{2}^1 \quad {}^3\$\mathbf{2}^4\} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

y $\dot{\mathbf{Q}}$ es el vector de velocidades de entrada dada por:

$$\dot{\mathbf{Q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

De (31) se puede resolver la cinemática directa de velocidad despejando el estado de velocidad \mathbf{V}_O asumiendo conocido el vector de entrada $\dot{\mathbf{Q}}$. El problema cinemático inverso de velocidad se resuelve despejando $\dot{\mathbf{Q}}$ de (31) considerando conocido el estado de velocidad \mathbf{V}_O .

3.3 Análisis de singularidades

Gosselin y Angeles (1990) clasificaron las singularidades de manipuladores paralelo en tres clases, basándose en la ecuación que relaciona la ecuación de entrada-salida de velocidad. En (31) se muestra la relación entre las velocidades angulares de la plataforma móvil del robot y las velocidades lineales de los actuadores. Con referencia a esta ecuación y a la clasificación dada en (Gosselin y Angeles, 1990) se presenta el siguiente análisis de singularidades para el caso de estudio.

Singularidad tipo 1: Habrá un vector de velocidad $\dot{\mathbf{Q}}$ diferente de cero para el cual la plataforma móvil no se mueve (el robot pierde GDL). Esto ocurre cuando $\det(\mathbf{B}) = 0$.

Analizando la matriz \mathbf{B} , se observa que este tipo de singularidad se presenta cuando la forma de Klein $\{ {}^0\mathcal{S}_1^1 \quad {}^3\mathcal{S}_1^4 \} = 0$, esto ocurre cuando la dirección de ambos tornillos es perpendicular. Esta situación puede ser evitada con una correcta selección de los parámetros geométricos del robot ($b, c, d_1, d_2, e_{12}, e_{13}, e_{23}$).

Singularidad tipo 2: Habrá un estado de velocidad \mathbf{V}_O distinto de cero para el cual las velocidades de los actuadores es cero, es decir, el robot podrá tener un movimiento infinitesimal mientras los actuadores están bloqueados (ciertos GDL del robot no pueden ser controlados). Esto ocurre cuando $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Esta condición implica que al menos dos tornillos que conforman la matriz \mathbf{A} tengan una dependencia lineal. Una posibilidad de que esto ocurra es cuando la dirección de los tornillos se interseca en un punto en común, otra posibilidad es que los seis tornillos sean paralelos. Analizando la Figura 11, se observa que, dados los parámetros geométricos del robot, no existe dependencia lineal entre los tornillos ${}^3\mathcal{S}_1^4, {}^3\mathcal{S}_2^4, \mathcal{S}_{mod}, \mathcal{S}_1^r, \mathcal{S}_2^r, \mathcal{S}_3^r$, por lo tanto, no existen singularidades de este tipo en este robot.

Singularidad tipo 3: La plataforma móvil puede ser movida mientras los actuadores están bloqueados y viceversa. Esto ocurre cuando $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) = 0$.

Dando valores numéricos a los ángulos de rotación ψ_X y ψ_Y (dosiflexión/plantarflexión y aducción/abducción) en el intervalo $[-29.8^\circ, 45.8^\circ]$ y $[-36^\circ, 36^\circ]$, respectivamente y considerando los parámetros geométricos del robot dados en la Tabla 2, se obtiene el valor absoluto de los determinantes de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} para el modo 1, se obtiene la Figura 12 y con valores para los ángulos ψ_X y ψ_Z (dosiflexión/plantarflexión e inversión/eversión) en el intervalo $[-29.8^\circ, 45.8^\circ]$ y $[-22^\circ, 22^\circ]$, la Figura 13. En ambas figuras, se corrobora que el robot presentado aquí, no presenta singularidades de ninguno de los tres tipos en el rango de movimiento para el cual fue diseñado.

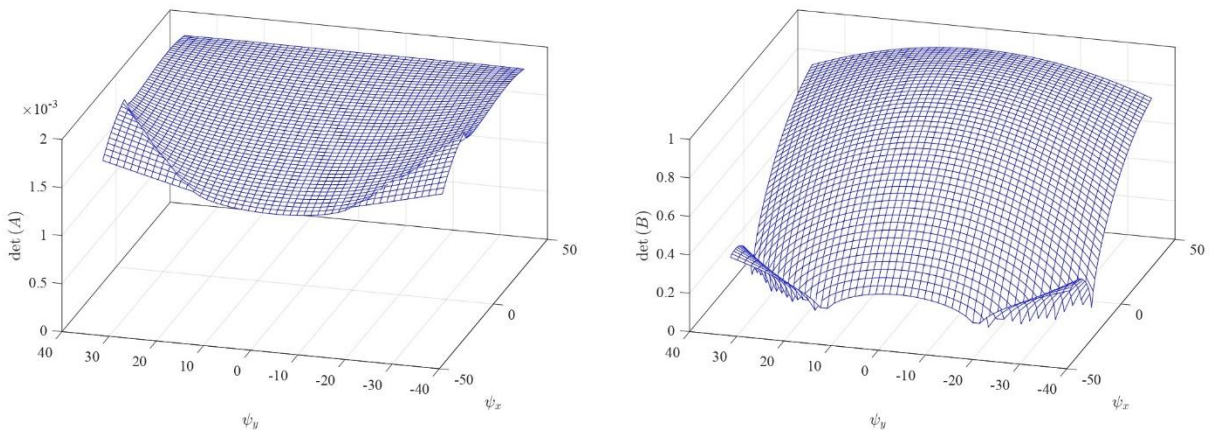


Figura 12. Determinante de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} para el modo 1.

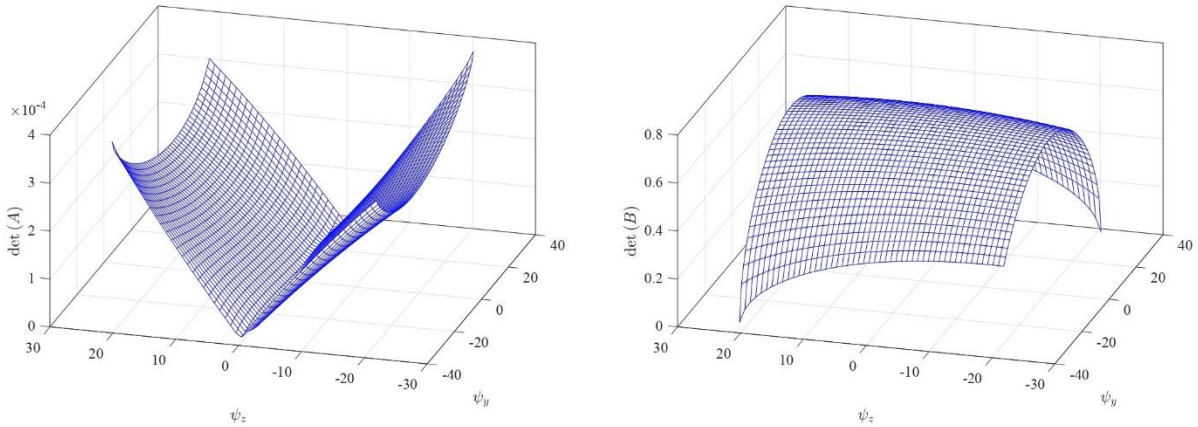


Figura 13. Determinante de las matrices A y B para el modo 2.

4. DISEÑO ESTRUCTURAL

Una tarea importante en el diseño estructural consiste en garantizar que la resistencia de los eslabones y de las uniones sea suficiente para soportar las fuerzas y esfuerzos ejercidos sobre estos. Por otro lado, uno de los requerimientos más importantes del rehabilitador es su portabilidad. Para esto, se seleccionan los materiales con criterios como: bajo costo, disponibilidad en el mercado nacional, baja densidad y alta rigidez. A continuación, se presenta la selección de materiales para cada uno de los componentes mecánicos del rehabilitador mostrados en la Figura 14.

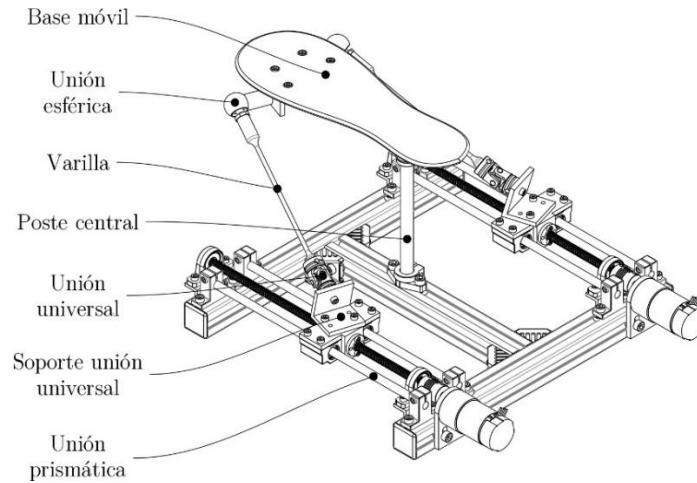


Figura 14. Componentes del robot paralelo para la rehabilitación del tobillo.

Observando las gráficas de la Figura 15 y descartando familias de materiales que poseen baja rigidez (elastómeros, espumas poliméricas y maderas), alto costo relativo por unidad de volumen (cerámicos) y alta fragilidad (vidrio y cerámicas porosas), se tiene que los materiales que cumplen con los criterios antes mencionados son los metales y los polímeros; dado que los metales poseen mayor rigidez que los polímeros, se seleccionan a los metales para la fabricación de los componentes del robot.

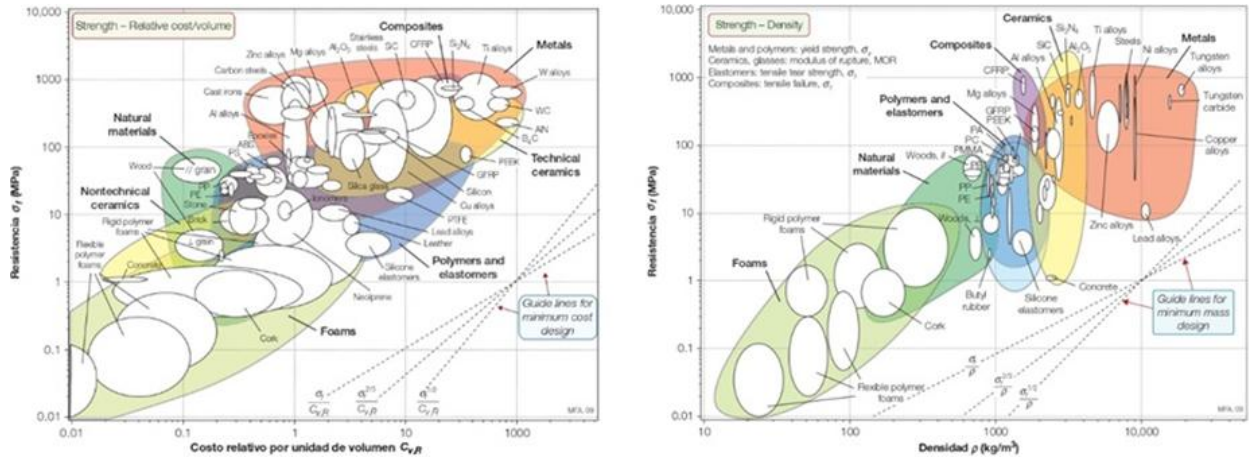


Figura 15. Cartas de selección de materiales (Ashby, 2016).

Como se muestra en la gráfica de relación de límite elástico y costo relativo de diferentes materiales, dentro de la familia de los metales, los aceros y las aleaciones de aluminio poseen mejor relación de costo-rigidez. Por otro lado, se aprecia que las aleaciones de aluminio poseen mejor relación de densidad-rigidez que los aceros. Por lo anterior, se selecciona la aleación de aluminio 6061 para fabricar los componentes estructurales del robot.

Con base en el análisis de fuerzas dinámicas que se presentan en el rehabilitador de tobillo durante su funcionamiento, presentado con detalle por Flores-Salazar (2019), se realizaron análisis de elemento finito de los diversos componentes estructurales del robot para corroborar que el diseño sea seguro con el material seleccionado. Los datos de la aleación de aluminio 6061 considerados para el análisis son los siguientes (Ashby, 2016):

- Límite elástico: 275 MPa
- Límite de tracción: 310 MPa
- Módulo de elasticidad: 69 GPa
- Relación de Poisson: 0.33
- Densidad: 2700 kg/m³
- Módulo cortante: 26 GPa

Se realizaron análisis de elemento finito de las principales partes estructurales del robot paralelo. Los resultados se resumen en la Tabla 3.

Considerando las fuerzas máximas reportadas por (Flores-Salazar, 2019), se realizó la selección de las juntas prismática, universales y esféricas para el robot. Para la unión prismática se seleccionó una mesa lineal cerrada LZBU Quadro de SKF que soporta 1290N de carga dinámica. Para las juntas universales y esféricas, se propusieron los modelos GN 9080-B12-EG y DIN 71802-16-M10-C, respectivamente, ambas de la marca JW Winco.

Tabla 3. Resultados de los análisis de elemento finito.

	Esfuerzo de von Mises máximo (MPa)	Deformación máxima (mm)	Deformación unitaria máxima	Factor de seguridad mínimo
Base móvil	31.49	4.27×10^{-2}	2.71×10^{-4}	8.73
Poste central	186.1	2.99	2.21×10^{-3}	1.48
Varillas	25.85	0.49	3.23×10^{-4}	10.64
Soporte de junta universal	62.05	1.54×10^{-1}	7.34×10^{-4}	4.43

Para el accionamiento de la junta prismática se propone la configuración mostrada en la Figura 16, usando un motor eléctrico rotacional y un mecanismo de tornillo sin fin. Tomando en cuenta las características del tornillo sin fin (paso de 2 mm) y el par de torsión necesario para realizar los movimientos de rehabilitación propuestos (Figura 17), se seleccionó el motor Pololu 37D con un motorreductor con relación 19:1.

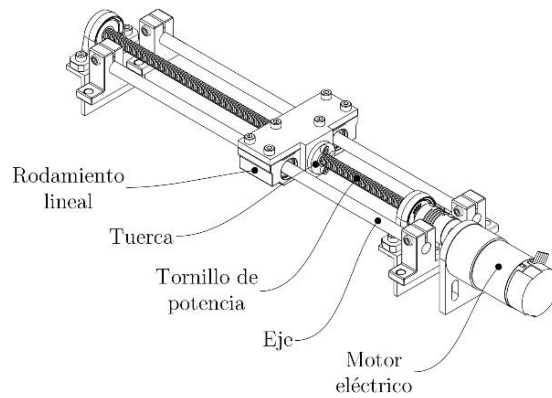


Figura 16. Junta prismática con mecanismo de accionamiento.

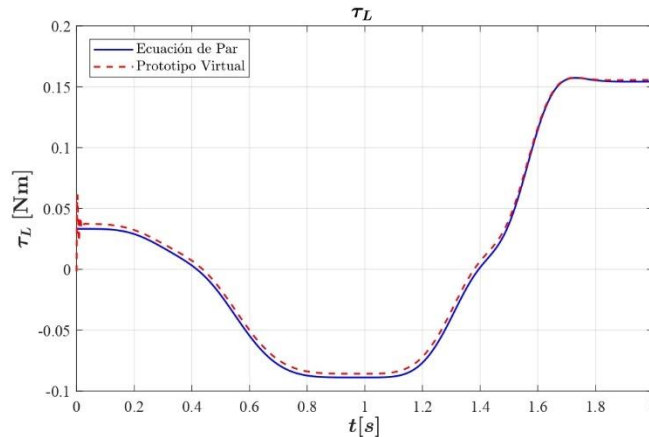


Figura 17. Par de torsión requerido para mover la carga de la base móvil (Flores-Salazar, 2019).

5. PROTOTIPO FÍSICO

En la Tabla 4 se muestran los componentes estructurales utilizados para el ensamble del robot rehabilitador con sus respectivos costos. El tipo de ensamble utilizado es el mecánico, es decir, la forma de unión entre los componentes puede deshacerse fácilmente o cuando convenga, por ello se usan sujetadores roscados.

Tabla 4. Lista de materiales y componentes.

Descripción	Cantidad	Precio unitario (MXN)	Subtotal (MXN)
Varilla de aluminio ½ in	1	95	95
Cable 22AWG	5 metros	5	25
Chumacera KP08	4	55	220
Cople flexible de 8 a 6.35 mm	2	38	76
Escuadra para perfil Bosch 28x28 mm	4	29	116
Motor Pololu 37Dx68L 19:1 con encoder	2	1199	2398
Perfil ángulo 1 ¼ x 1/8 in aluminio	1	100	100
Perfil Bosch 28x28 mm	1	150	150
Placa Nylamid 3/8 in 30x30 cm	1	960	960
Puente H VN2SP30 simple	2	100	200
Rodamiento lineal SC08UU	4	59	236
Soporte para eje lineal SHF 12	1	60	60
Soporte para eje lineal SK08	8	39	312
Tuerca T 8 mm M5x0.8	38	3	114
Tornillo allen M10x1.5 – 30	2	4	8
Tornillo allen M5x0.8 – 16	38	2.04	77.52
Tornillo allen M4x0.7 – 16	20	1.97	39.4
Tornillo allen M4x0.7 – 20	4	2.13	8.52
Tornillo allen M3x0.5 – 16	4	1.5	6
Tuerca M4x0.7	12	0.25	3
Tuerca M3x0.5	4	0.7	2.38
Arandela plana 7/32	4	0.25	1
Arandela de presión 7/32	4	0.58	2.32
Gabinete de plástico	1	99	99
Unión esférica	2	164.49	328.98

Unión universal	3	165.43	496.29
Varilla eje lineal 8 mm	2	195	390
Imán de neodimio redondo 8x2 mm	2	4	8
Varilla y tuerca rosca ACME de 8 mm 4 hilos 2 mm de paso 400 mm de longitud	2	250	500
		Total	6457.83

Finalmente, en la Figura 18 se puede apreciar el prototipo físico del rehabilitador de tobillo. Es importante mencionar que tanto en la Tabla 4 como en la Figura 16 se presentan los componentes del sistema electrónico descrito en la siguiente sección.

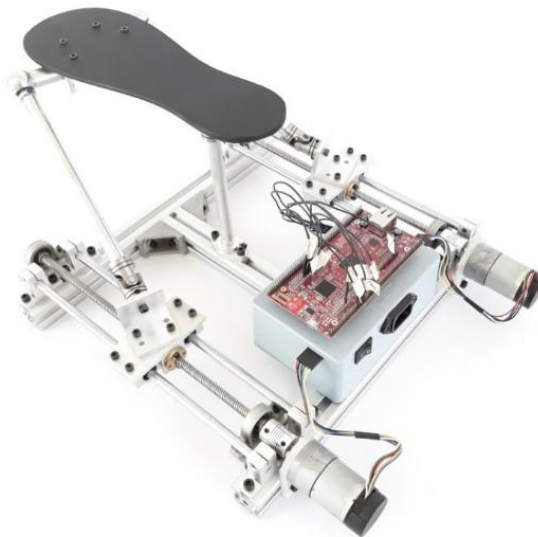


Figura 18. Prototipo físico del rehabilitador de tobillo

6. SISTEMA ELECTRÓNICO

El sistema electrónico (Figura 19) se compone por los siguientes módulos:

- Microcontrolador Hercules TMS570LC43x Launch Pad.
- Puente H VNH2SP30
- 2 motores Pololu 37D 19:1
- Unidad de medición inercial MPU-6050
- Fuente de alimentación

El microcontrolador es programado para que funcione como tarjeta de adquisición de datos. El puente H es utilizado para controlar la dirección y la velocidad de giro de los motores. Por otro lado, la unidad de medición inercial es usada para medir la velocidad angular, calcular la posición y la aceleración angular de la plataforma móvil del robot. Finalmente, la fuente de alimentación convierte el voltaje en corriente alterna de la línea de alimentación eléctrica en voltaje de corriente directa para alimentar los sensores y actuadores del prototipo.

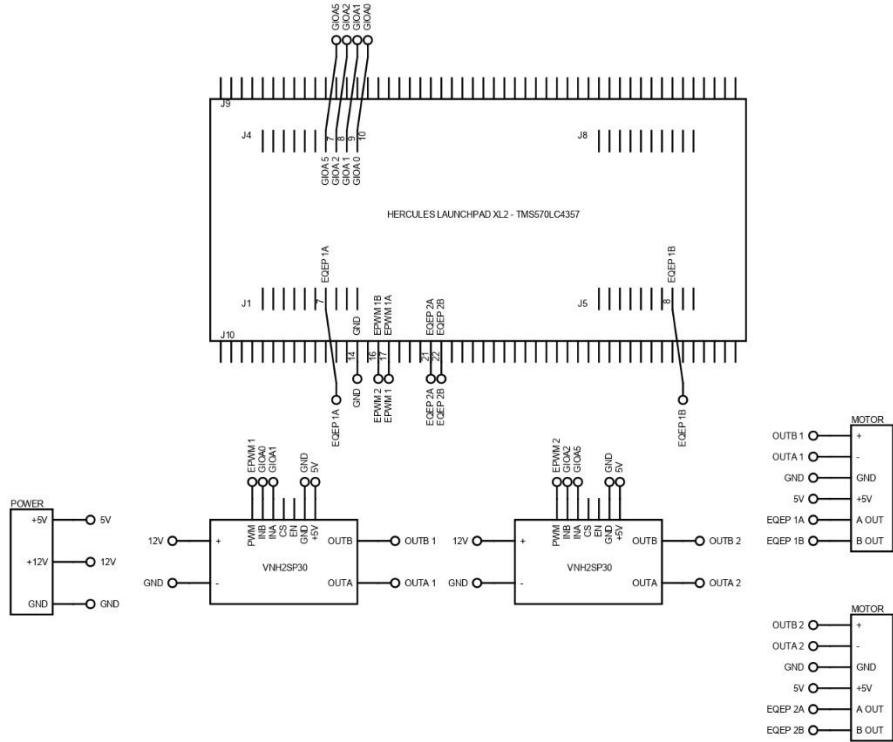


Figura 19. Diagrama del sistema electrónico

7. INTERFAZ DE USUARIO

La interfaz es el medio con el que el usuario puede comunicarse con un dispositivo. Se diseñó una interfaz gráfica de usuario utilizando el software LabVIEW con la finalidad de presentar una consola de controles del dispositivo rehabilitador de forma sencilla para facilitar la operación del mismo, introduciendo sólo los parámetros necesarios para un programa de terapia tales como: modo de operación, tipos de movimiento y valores de los ángulos de flexión/extensión, inversión/eversión y aducción/abducción, tiempo de duración de la terapia, número y velocidad de repeticiones. En la Figura 20 se muestra la interfaz de usuario desarrollada.

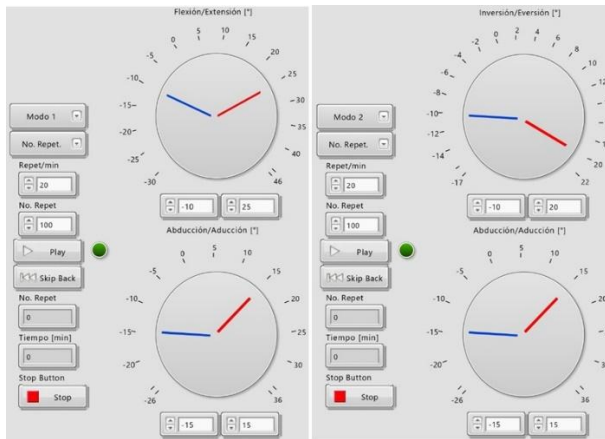


Figura 20. Interfaz de usuario

8. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la Figura 21 se muestran los componentes mecánicos y electrónicos del rehabilitador de tobillo, así como su integración con la interfaz gráfica de usuario.

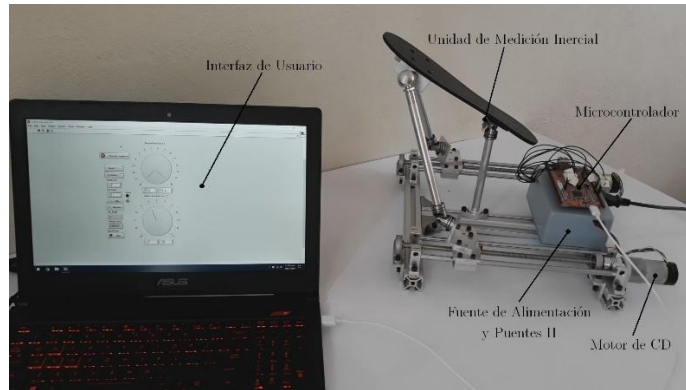


Figura 21. Rehabilitador de tobillo e interfaz gráfica

Como se mencionó anteriormente, el rehabilitador puede operar en dos modos, dependiendo de los movimientos del tobillo que se requieran realizar. En el modo 1, se pueden ejecutar los movimientos de flexión/extensión y de aducción/abducción, los cuales se muestran en las Figuras 22 y 23, respectivamente. Durante la extensión, el pie es atraído hacia arriba en dirección a la pierna, el rehabilitador desplaza las correderas lineales alejándolas de la ubicación de los motores y la base móvil rota con un ángulo negativo, alcanzando un valor máximo de -30° . La flexión es un movimiento opuesto a la extensión, en este caso el rehabilitador desplaza las guías lineales acercándolas a los motores y la plataforma móvil gira en sentido positivo con un ángulo máximo de 46° .



Figura 22. Movimientos de flexión y extensión

Por otro lado, la aducción es el movimiento de los dedos del pie hacia adentro, para este caso, el rehabilitador desplaza ambas correderas en sentido contrario para rotar la base móvil en sentido positivo un ángulo máximo de 36° . La abducción es el movimiento de los dedos del pie hacia afuera, este movimiento se obtiene invirtiendo el desplazamiento de ambas correderas con respecto al movimiento de aducción. El ángulo máximo alcanzado en abducción es de 36° .



Figura 23. Movimientos de aducción y abducción

En el modo 2 de operación, el rehabilitador es capaz de desarrollar los movimientos de aducción/abducción y de eversión/inversión, estos últimos se muestran en la Figura 24. La eversión es el giro alrededor del eje del pie, de tal forma que la planta se orienta hacia afuera. Para obtener este movimiento, la junta superior que une al poste central con la plataforma móvil se gira 90° como se muestra en la Figura 5 y las correderas lineales se mueven en sentidos opuestos alcanzando un desplazamiento máximo de 22° . La inversión es el movimiento opuesto a la eversión y se obtiene invirtiendo el sentido de movimiento de las correderas, alcanzando un ángulo máximo de 17° .



Figura 24. Movimientos de eversión e inversión

Para corroborar el correcto funcionamiento del dispositivo, se realizaron pruebas con una persona sana de edad adulta. El objetivo fue verificar que los motores y la plataforma móvil del rehabilitador sigan la trayectoria necesaria para realizar los movimientos de rehabilitación considerando la carga que representa el peso del paciente. Para esta tarea, se desarrolló un esquema de control robusto descrito con detalle en (Flores-Salazar et al., 2023).

Para fines ilustrativos, se presentan los resultados para el movimiento de flexión/extensión. La trayectoria deseada es una función suave dada por un polinomio de Bézier dividida en dos partes. La primera parte considera un valor inicial en reposo de 0° , un valor final de 30° comenzando en un tiempo de 1.25s y finalizando en 4.25s. La segunda parte de la trayectoria comienza en 4.25s y termina en 7.25s, con un ángulo

inicial de 30° , finalizando en la posición de reposo en 0° . En la Figura 25 se presentan las posiciones inicial y final para la prueba de flexión/extensión y en la Figura 26 se muestra un comparativa entre la trayectoria deseada (referencia) y la trayectoria medida en la plataforma móvil mediante la unidad inercial. En general, se aprecia un ligero desfaseamiento entre la trayectoria de referencia y la medida por el sensor, esto se debe principalmente al proceso de filtrado de la señal real. El error máximo de seguimiento es menor a 3.5° , aun considerando la carga que representa el peso del pie del paciente actuando en la superficie de la plataforma móvil.



Figura 25. Posiciones inicial y final del movimiento de flexión/extensión

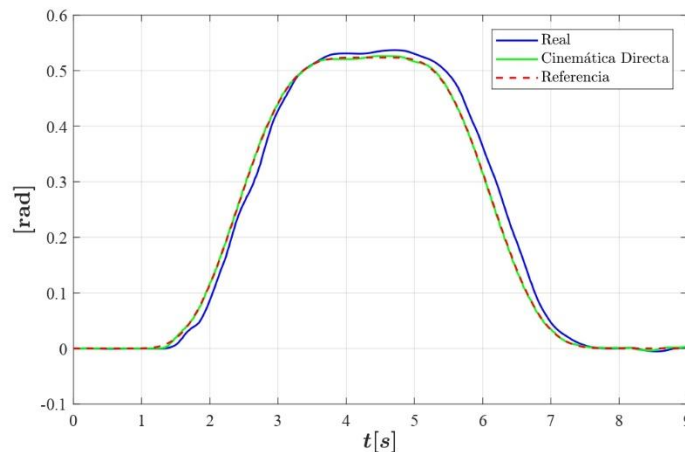


Figura 26. Respuesta al seguimiento de trayectorias en flexión/extensión

De los resultados presentados en esta sección, se observa que el robot paralelo propuesto cumple con los rangos de movimiento para los tres grados de libertad del tobillo dados en la Tabla 1 que corresponden al promedio de personas sanas, por lo que el dispositivo podría ser usado en diferentes etapas del proceso de rehabilitación del tobillo. Además, se comprobó la ausencia de singularidades de los tres tipos en los intervalos de funcionamiento de ambos modos de operación. El uso del mecanismo paralelo reconfigurable permitió generar una propuesta funcional, de bajo costo para los tres movimientos del tobillo en rangos correspondientes a los de personas sanas. Mediante la teoría de tornillos es posible obtener de manera sistemática las ecuaciones de entrada-salida de velocidad sin necesidad de derivar las ecuaciones de posición y evitando complejas manipulaciones algebraicas para eliminar del análisis las velocidades de las juntas pasivas.

9. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó el desarrollo de un robot paralelo con la configuración 2-PUS+RR para realizar los movimientos de rehabilitación del tobillo. La reconfiguración de una de las juntas del robot permite realizar los tres movimientos del tobillo con solo dos actuadores, aunque sólo se pueden realizar dos movimientos de forma simultánea. El enfoque de diseño es importante para garantizar el correcto funcionamiento y para una correcta integración de los diferentes subsistemas que integran el rehabilitador (mecanismo, motores, electrónica, control e interfaz gráfica). El uso de diversas herramientas de software y simulación permiten realizar pruebas virtuales antes de construir el dispositivo físico, lo cual ahorra tiempo de desarrollo y recursos. El prototipo obtenido cumple con el rango completo de movimiento para las tres rotaciones del tobillo y los resultados de las pruebas realizadas con una persona sana permiten aseverar que el rehabilitador puede ser usado en pacientes que requieran terapia para la rehabilitación del tobillo con la correcta guía y supervisión de un especialista en rehabilitación física. La interfaz gráfica desarrollada permite una fácil operación del dispositivo y la versatilidad para modificar los parámetros de movimiento de acuerdo a lo requerido en casos específicos. Es importante mencionar que el dispositivo ha sido sometido a la evaluación por parte de profesionales de la terapia física, recibiendo información importante para los requerimientos de diseño y retroalimentación para mejorar su funcionamiento. Como trabajos futuros se plantea someter el prototipo al protocolo correspondiente que permita su uso en pacientes reales.

CONTRIBUCIÓN DE AUTORÍA CRediT

Erick Daniel Flores-Salazar: Conceptualización, Metodología, Software, Validación, Análisis Formal, Investigación.

Manuel Arias-Montiel: Conceptualización, Validación, Análisis Formal, Investigación, Recursos, Redacción – Borrador Original, Revisión y Edición, Supervisión, Administración del Proyecto, Gestión de Recursos.

Esther Lugo-González: Conceptualización, Metodología, Validación, Análisis Formal, Investigación, Recursos, Supervisión, Administración del Proyecto.

DECLARACIÓN DE USO DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL EN ESTE DOCUMENTO

Los autores declaran que no han usado herramientas de inteligencia artificial para generar el contenido de este documento.

DECLARACIÓN DE CONFLICTO DE INTERESES

Los autores declaran que no tienen ningún conflicto de intereses financieros ni relaciones personales que pudieran haber influido en el trabajo presentado en este artículo.

DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los conjuntos de datos generados y/o analizados durante este estudio están disponibles a través del autor de correspondencia a solicitud de los interesados.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Universidad Tecnológica de la Mixteca por las facilidades otorgadas para la realización de este proyecto.

REFERENCIAS

- Arriaga-Rivera, J. (2023). Tratamiento de rehabilitación en enfermedades neuromusculares. *Lux Médica*, 18 (52), 1-16.
- Ashby, M. F. (2016). *Material selection in mechanical design*. 5th ed. Kidlington, Oxford, UK: Butterworth-Heinemann.
- Catalán-Rodríguez, D. E., Sierra-Pérez, M., Ceballos-Sánchez, J. A. & Rendón-Macías, M. E. (2018). Tratamiento de esguince de tobillo grado II en adultos laboralmente activos: Inmovilización contra vendaje funcional. *Revista de Sanidad Militar*, 72 (3-4), 240-245.
- M. Dong, M., Zhou, Y., Li J., Rong, X., Fan, W., Zhou, X. & Kong, Y. (2021). State of the art in parallel ankle rehabilitation robot: a systematic review. *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, 18, Art. no. 52.
- Doroftei, I., Cazacu, C. M. & Alaci, S. (2023). Design and experimental testing of an ankle rehabilitation robot. *Actuators*, 12 (6), Art. No. 238.
- Flores-Salazar, E. D. (2019). *Diseño y construcción de un rehabilitador de tobillo*. (Tesis de grado). Universidad Tecnológica de la Mixteca, Oaxaca, México.
- Flores-Salazar, E. D., Arias-Montiel, M., Lugo-González, E., Gallardo-Alvarado, J. & Tapia-Herrera, R. (2021). Alternative methods for direct kinematic analysis of a parallel robot for ankle rehabilitation. En: Rauter, G., Cattin, P.C., Zam, A., Riener, R., Carbone, G., Pisla, D. (Eds.) *New Trends in Medical and Service Robotics. MESROB 2020* (pp. 53-61). Springer.
- Flores-Salazar, E. D., Lugo-González, E., Arias-Montiel, M. & Gallardo-Alvarado, J. (2023). A robust control scheme for a 2PUS+RR parallel robot for ankle rehabilitation. *Robotica*, 41 (11), 3296-3313.
- Gallarado-Alvarado, J. (2016). *Kinematic analysis of parallel manipulators by algebraic screw theory*. 1st ed. Cham, Switzerland: Springer.
- Gallarado-Alvarado, J., Rodríguez, R., Alcazar, L. & Juárez, F. (2018). A parallel manipulator for simulating the ship seakeeping trial. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions on Mechanical Engineering*, 43, 529-538.
- Gosselin, C. & Angeles, J. (1990). Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 6, 281-290.
- Instituto Mexicano del Seguro Social (2024), Comunicado, 17 de julio de 2024. <https://www.gob.mx/imss/prensa/mas-de-12-mil-empresas-y-casi-4-millones-de-trabajadores-beneficiados-con-el-programa-elssa-del-seguro-social>
- Lippert, L. (2006). *Clinical Kinesiology and Anatomy*. 4th ed. Philadelphia, PA, USA: F. A. Davis Company.
- López, R., Torres, J., Salazar, S. & Lozano, R. (2014). Desarrollo de un exoesqueleto para rehabilitación de tobillo y rodilla. *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica*, 35 (1), 13-28.

Meng, Q., Liu, G., Xu, X., Meng, Q. & Yu H. (2023). Design and analysis of a supine ankle rehabilitation robot for early stroke recovery. *Machines*, 11 (8), Art. No. 787.

Rosado, W. M. A., Ortega, A. B., Valdés, L. G. V., Ascencio, J. R. & Beltrán, C. D. G. (2017). Active rehabilitation exercises with an ankle rehabilitation prototype based in a robot parallel structure. *IEEE Latin America Transactions*, 15 (5), 786-794.

Rosado, W. M. A., Valdés, L. G. V., Ortega, A. B., Ascencio, J. R. & Beltrán, C. D. G. (2017). Passive rehabilitation exercises with an ankle rehabilitation prototype based in a robot parallel structure. *IEEE Latin America Transactions*, 15 (1), 48-56.

Shah, M. N., Basah, S. N., Basaruddin, K. S. & Takemura, H. (2022). Ankle injury rehabilitation robot (AIRR): Review of strengths and opportunities based on a SWOT (Strengths, Weaknesses, Opportunities, Threats) analysis. *Machines*, 10 (11), Art. No. 1031.

Siegler, S., Chen, J. & Schneck, C. D. (1988). The three-dimensional kinematics and flexibility characteristics of the human ankle and subtalar joints--Part I: Kinematics. *Journal of Biomedical Engineering*, 110 (4), 364-373.

Taghirad, H. D. (2013). *Parallel robots: Mechanics and control*. 1st ed. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2013.

Zhang, Y., Liu, X., Qiao, X. & Fan, Y. (2023). Characteristics and emerging trends in research on rehabilitation robots from 2001 to 2020: Bibliometric study. *Journal of Medical Internet Research*, 25, 1-14.

Zhao, J., Li, B., Yang, X. & Yu, H. (2009). Geometrical method to determine the reciprocal screws and applications to parallel manipulators. *Robotica*, 27, 929-940.

Zhetenbayev, N., Zhauyt, A., Balbayev, G. & Shingissov, B. (2022). Robot device for ankle joint rehabilitation: a review. *Vibroengineering Procedia*, 41, 96-102.