Revista Científica

ISSN 1818-6742
Impreso en Nicaragua.
www.nexo.uni.edu.ni

Vol. 23, No. 02, pp.69-74/Noviembre 2010

Relaciones de recurrencia e identidades entre $\delta((x_1^2+...+x_\mu^2)^m-(x_{\mu+1}^2+...+x_{\mu+\nu}^2)^m)$ y sus derivadas

M. Aguirre

Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada-NUCOMPA
Facultad de Ciencias Exactas UNCentro, Pinto 399,
7000 Tandil, Argentina.
e-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar

(recibido/received: 05-Agosto-2010; aceptado/accepted: 16-Noviembre-2010)

RESUMEN

En este trabajo, se le da un sentido a la fórmula $G^l.\delta^{(k)}(G)-\frac{(-1)^l k!}{(l-k)!}\delta^{(k-l)}(G)=0$ donde $G=(x_1^2+...+x_\mu^2)^m-(x_{\mu+1}^2+...+x_{\mu+\nu}^2)^m$. Nuestra fórmula es una generalización de formulas que aparecen en ([3]) y ([4]). En particular cuando $m=1$ y $l=1$, la formula es considerada por ejemplo, por Bollini, Giambiagi y Tiommo para la teoría de regularización analítica en las ecuaciones clásicas de Yan-Mills y sus aplicaciones para el potencial singulars (c.f. [5]).

Palabras claves: Teoría de distribuciones

ABSTRACT

In this paper, we give a sense to formula $G^l.\delta^{(k)}(G)-\frac{(-1)^l k!}{(l-k)!}\delta^{(k-l)}(G)=0$ where $G=(x_1^2+...+x_\mu^2)^m-(x_{\mu+1}^2+...+x_{\mu+\nu}^2)^m$. Our formula is a generalization of the formulae that appear in ([3]) and ([4]). In particular when $m=1$ and $l=1$, the formula is considered for example, by Bollini, Giambiagi and Tiommo for their Theory of analytic regularization in classical Yan-Mills equations and its application for the singular potentials (c.f. [5]).

Keywords: Distribution theory

INTRODUCCIÓN

Sea $x=(x_1,x_2,...,x_\mu,x_{\mu+1},...x_{\mu+\nu})$ un punto en el espacio Euclideano n-dimensional R^n, donde $\mu+\nu=n$ es la dimensión del espacio, m es un entero positivo y $G(m,x)$ es definido por

$$G=G(m,x)=(x_1^2+...+x_\mu^2)^m-(x_{\mu+1}^2+...+x_{\mu+\nu}^2)^m \tag{1}$$

La hipersuperficie G =0, fue introducida por A. Kananthai y Nonlaopon ([1]). Observamos que haciendo $m=1$ in (1) se obtiene

$$G=G(1,x)=x_1^2+...+x_\mu^2-(x_{\mu+1}^2+...+x_{\mu+\nu}^2)=P(x)=P. \tag{2}$$

La forma cuadrática definida en (2) es debido a I.M. Gelfand and G.E. Shilov ([2], p. 253).

La hipersuperficie $G=0$ es una generalización del hipercono $P=0$ con un punto singular (el vértice) en el origen.

De ([1], p. 51) se obtiene la siguiente fórmula

$$<\delta^k(G),\varphi>=(-1)^k\int[\frac{\partial}{\partial\varphi}\{\varphi\, D\begin{pmatrix}x\\u\end{pmatrix}\}]_{u_1=o}\,du_2...du_n \tag{3}$$

Para toda φ en K donde K es el conjunto de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto([2]),

$$D\begin{pmatrix}x\\u\end{pmatrix}=\frac{\partial(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial(G,u_2,...,u_n)} \tag{4}$$

y

$$u_1=G,\ \ u_2=x_2,...,u_n=x_n. \tag{5}$$

Haciendo el cambio de coordenadas bipolar definido por

$$x_1=rw_1,\ x_2=rw_2,...,x_\mu=rw_\mu;x_{\mu+1}=sw_{\mu+1},...,x_{\mu+\nu}=sw_{\mu+\nu} \tag{6}$$

donde

$$w_1^2+...+w_\mu^2=1, \qquad w_{\mu+1}^2+...+w_{\mu+\nu}^2=1, \tag{7}$$

$$r^2=x_1^2+...+x_\mu^2, \qquad s^2=x_{\mu+1}^2+...+x_{\mu+\nu}^2 \tag{8}$$

$$P=r^{2m}-s^{2m}. \tag{9}$$

De ([1], p. 51-53, formulas (2.7)-(2.14)), se tiene las siguientes fórmulas:

$$< \delta^k(G), \varphi >= (-1)^k \int [\frac{\partial^k}{\partial G^k}\{\frac{1}{2m}(r^{2m}-G)^{\frac{\nu}{2m}-1}\varphi\}]_{G=0} r^{\mu-1} dr d\Omega_\mu d\Omega_\nu , \tag{10}$$

$$< \delta^k(G), \varphi >= \int [(\frac{1}{2ms^{2m-1}}\frac{\partial}{\partial s})^k \{s^{\nu-2m}\frac{\varphi}{2m}\}]_{s=r} r^{\mu-1} dr d\Omega_\mu d\Omega_\nu , \tag{11}$$

$$(\delta^k(G), \varphi) = \int_0^\infty [(\frac{1}{2ms^{2m-1}}\frac{\partial}{\partial s})^k \{s^{\nu-2m}\frac{\psi(r,s)}{2m}\}]_{s=r} r^{\mu-1} dr \tag{12}$$

y

$$(\delta^k(G), \varphi) = (-1)^k \int_0^\infty [(\frac{1}{2mr^{2m-1}}\frac{\partial}{\partial r})^k \{r^{\mu-2m}\frac{\psi(r,s)}{2m}\}]_{s=r} r^{\nu-1} dr. \tag{13}$$

donde $\psi(v,s) = \int \varphi d\Omega_\mu d\Omega_\nu$, $d\Omega_\mu d\Omega_\nu$ son los elementos de área de las superficies en la esfera unitaria en R^μ y R^ν respectivamente.

Las integrales (12) y (13) convergen si $k < \frac{n}{2m} - 1$ ([1], p. 52). Si por otra parte $k \geq \frac{n}{2m} - 1$, se definen $< \delta_1^k(G), \varphi >$ y $< \delta_2^k(G), \varphi >$ como las regularizaciones de (12) y (13) respectivamente.

Donde

$$(\delta_1{}^{(k)}(G), \varphi) = \int_0^\infty [(\frac{1}{2ms^{2m-1}}\frac{\partial}{\partial s})^k (s^{\nu-2m}\frac{\psi(r,s)}{2m})]_{s=r} r^{\mu-1} dr \tag{14}$$

para $k \geq \frac{n}{2m} - 1$ ([1], p. 53, fórmula 2.15) y

$$(\delta_2{}^{(k)}(G), \varphi) = (-1)^k \int_0^\infty [(\frac{1}{2mr^{2m-1}}\frac{\partial}{\partial r})^k (r^{\mu-2m}\frac{\psi(r,s)}{2m})]_{r=s} s^{\nu-1} ds \tag{15}$$

para $k \geq \frac{n}{2m} - 1$ ([1], p. 53, fórmula 2.16).

Identidades entre $\delta((x_1^2+...+x_\mu^2)^m - (x_{\mu+1}^2+...+x_{\mu+\nu}^2)^m)$ y sus derivadas.

En este parágrafo, vamos a darle un sentido al producto singular $G^s.\delta^{(k)}(G)$, donde $G = G(m,x)$ está definida by (1). Este producto establece una identidad entre la delta de Dirac $\delta(G)$ y sus derivadas.

Teorema: Sea $G = G(m,x)$ *definida por (1),* s *un entero nonegativo y* $\delta^{(k)}(G)$ *es la distribución definida por la ecuación (10) o la ecuación (11),entonces la siguiente fórmula es válida*

$$G^l.\delta^{(k)}(G) = \begin{cases} \frac{(-1)^l k!}{(k-l)!}\delta^{(k-l)}(G) \; si \; k \geq l \\ \\ 0 \; si \; k < l \end{cases} \tag{16}$$

bajo la condición $k \leq \frac{n}{2m} - 1.$

Demostración: de(11) y (12), se tiene,

$$< G^l.\delta^{(k)}(G),\varphi >= (-1)^k .$$

$$\int [\tfrac{\partial^k}{\partial G^k}\{\tfrac{1}{2^k}(r^{2m}-G)^{\frac{\nu}{2s}-1} G^l.\varphi\}]_{G=0} r^{\mu-1} dr d\Omega_\mu d\Omega_\nu = \tag{17}$$

$$= \int_0^\infty [(\tfrac{1}{2ms^{2m-1}}\tfrac{\partial}{\partial s})^k \{(r^{2m}-s^{2m})^l s^{\nu-2m}\ \tfrac{\psi(r,s)}{2m}\}]_{s=r} r^{\mu-1} dr$$

Si $k < \frac{n}{2m}-1.$

Por otra parte, haciendo el cambio de variables

$$u = r^{2m}, v = s^{2m} \tag{18}$$

y escribiendo

$$\psi(r,s) = \psi_1(u,v) \tag{19}$$

Se tiene,

$$< \delta^{(k)}(G),\varphi >= \frac{1}{4m}\int_0^\infty [(\frac{\partial}{\partial v})^k \{v^{\frac{\nu}{2m}-1}\psi_1(u,v)\}]_{v=u} u^{\frac{\mu}{2m}-1} du \tag{20}$$

From (17) and by using (18), (19) and (20) we have,

$$< G^l.\delta^{(k)}(G),\varphi >= \frac{1}{4m}\int_0^\infty [\frac{\partial^k}{\partial v^k}\{(u-v)^l v^{\frac{\nu}{2m}-1}\psi_1(u,v)\}]_{v=u} u^{\frac{\nu}{2m}-1} du \tag{21}$$

Ahora considerando la fórmula de Leibniz para la derivada de un product se tiene:

$$[\tfrac{\partial^k}{\partial v^k}\{(u-v)^l v^{\frac{\nu}{2m}-1}\psi_1(u,v)\}]_{v=u} =$$

$$= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [\tfrac{\partial^i}{\partial v^i}(u-v)^l\ \tfrac{\partial^{k-i}}{\partial v^{k-i}}(v^{\frac{\nu}{2m}-1}\psi_1(u,v)]_{v=u} = \tag{22}$$

$$= \begin{cases} (-1)^l \binom{k}{l} l! [D_{k-l}(v^{\frac{\nu}{2m}-1}\psi_1(u,v)]\}_{v=u} \text{ if } k \geq l \\ 0 \text{ if } k < l. \end{cases}$$

De (21) y usando (22) se tiene,

$$
< G^l.\delta^{(k)}(G), \varphi >= \begin{cases} \frac{1}{4m}\int_0^{\infty}(-1)^l \binom{k}{l} \frac{\partial^{k-p}}{\partial v^{k-l}}\{v^{\frac{v}{2m}-1}\psi_1(u,v)\}]_{v=u}. \\ \\ .u^{\frac{v}{2m}-1}du \ \text{ si } k \geq l, \\ \\ 0 \text{ si } k < l, \end{cases} \tag{23}
$$

bajo la condición $k < \frac{n}{2m} - 1$.

De (23), considerando (20) se tiene,

$$
< G^l.\delta^{(k)}(G), \varphi >= \begin{cases} (-1)^l \binom{k}{l} l! < \delta^{(k-l)}(G), \varphi > \quad \text{si } k \geq l, \\ \\ 0 \text{ if } k < l, \end{cases} \tag{24}
$$

bajo la condición $k < \frac{n}{2m} - 1$.

De (24), obtenemos la siguiente fórmula

$$
G^l.\delta^{(k)}(G) = \begin{cases} (-1)^l k! \delta^{(k-l)}(G) \ \text{ si } k \geq l, \\ \\ 0 \text{ si } k < l, \end{cases} \tag{25}
$$

bajo la condición $k < \frac{n}{2m} - 1$.
De (25) se obtiene la fórmula (16). La fórmula (16) puede ser escrita en la siguiente forma

$$
((x_1^2 + \ldots + x_\mu^2)^m - (x_{\mu+1}^2 + \ldots + x_{\mu+\nu}^2)^m)^l.\delta^{(k)}(G) -
$$

$$
\tag{26}
$$

$$
-\frac{(-1)^l k!}{(l-k)!}\delta^{(k-l)}((x_1^2 + \ldots + x_\mu^2)^m - (x_{\mu+1}^2 + \ldots + x_{\mu+\nu}^2)^m) = 0
$$

si $k \geq l$ y $k \leq \frac{n}{2m} - 1$.

Cuando $m = 1$, la fórmula (26) aparece en ([3] y ([4], p. 24). En particular para $m = 1$ y $l = 1$ la fórmula (26) es considerada por ejemplo por por Bollini, Giambiagi y Tiommo para la teoría de regularización analítica en las ecuaciones clásicas de Yan-Mills y sus aplicaciones para el potencial singular(c.f. [5]).

Comentario: sabemos de *([C1]) que el siguiente product es válido*

$$f(P).\delta^{(k)}(P) = \sum_{j=o}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f^{(j)}(0)\delta^{(k-j)}(P)$$

([6], p. 85),donde f *es una function infinitamente diferenciable y* P *es una función infinitamente diferenciable tal que*

$$\text{grad}\, P = \left(\frac{\partial P}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial P}{\partial x_p}, \frac{\partial P}{\partial x_{p+1}}, \ldots \frac{\partial P}{\partial x_{p+q}} \right) \neq 0.$$

Nuestra fórmula (16)no es consecuencia de la fórmula (27) porque la condición (28) no es válida.

REFERENCIAS

[1] Kananthai and Nonlaopan, On the Residue of generalized Function P^{λ}, Thai Journal of Mathematics, 1 (2003), 49-57.

[2] I. M. Gelfand and G.E. Shilov., Generalized Functions,Volume1,Academic Press,New York,1964.

[3] Aguirre M.A., A recurrence formula between P^m and $k-th$ derivative of Dirac delta in P, Scientific Journal NEXO, Volume 22, Nro. 02, 2009.

[4] C. K .Li., A review on the poroduct of distributions, Mathematical Methods in Engineering, Springer book, editors Kenan Tass, J. A. Tenreiro Machado and Drumitru Baleanu, Cankaya University, Ankara Turkey,2006.

[5] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi and J. Tiommo. Singular Potentials and analytic regularizations in Classical Yang-Mills equations, J. Math. Phys, 20 (9),s eptember 1979.

[6] C. K. Li. The Products of Distributions on Manifolds and Invariant Theorem, Journal of Analysis and Applications, Vol. 6 (2008), No.2, pp. 77-95.

Manuel A. Aguirre, es Profesor y Decano de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada-NUCOMPA
Facultad de Ciencias Exactas UNCentro
Paraje Arroyo Seco, 7000-Tandil
Provincia de Buenos Aires, Argentina
Tel.: +54 2293 439657
E-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar