Nexo Revista Científica
Vol. 23, No. 01, pp.33-39/Mayo 2010

ISSN 1818-6742
Impreso en Nicaragua.
www.nexo.uni.edu.ni

Una nueva expresión acerca del producto de convolución de la derivada de orden k de la delta de Dirac en $|x|^2 - m^2$.*

M. Aguirre.

Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada-NUCOMPA
Facultad de Ciencias Exactas UNCentro, Pinto 399,
7000 Tandil, Argentina.
e-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar

(recibido/received: 16-Marzo-2010; aceptado/accepted: 16-Mayo-2010)

RESUMEN

En este artículo se obtiene una expansión en series (tipo Taylor) de la distribución $\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)$, la cual permite dar una nueva expresión para el producto de convolución de $\{\delta^{(k)}|x|^2 - m^2)\} * \{\delta^{(t)}(|x|^2 - m^2)\}$. Otras expresiones de este producto aparecen en ([5]).

Palabras claves: distribución, convolución, producto, delta de Dirac; teoría de distribuciones, AMS Subjet Classification, 46F10, 46F12.

ABSTRACT

In this paper, we obtain a expansion in series (type Taylor) of distribution $\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)$, and give a new expression for the convolution product of $\{\delta^{(k)}|x|^2 - m^2)\} * \{\delta^{(t)}(|x|^2 - m^2)\}$. Other expressions of that product appear in ([5]).

Keywords: distribution, convolution, product, Dirac´s delta function, theory of distributions, AMS Subjet Classification, 46F10, 46F12.

*Este trabajo es parcialmente soportado por la Comisión de Investigaciones Científicas de la provincia de Buenos Aires (C.I.C.), Argentina

INTRODUCCIÓN

Sea $x = (x_1,...x_n)$ un punto del espacio Euclideano $n-$dimensional R^n.

Consideremos las distribuciones $(|x|^2 - m^2)_+^\lambda$ y $(|x|^2 - m^2)_-^\lambda$ definidas por

$$(|x|^2 - m^2)_+^\lambda = \begin{cases} (|x|^2 - m^2)^\lambda & si \quad |x|^2 - m^2 \geq 0 \\ 0 & si \quad |x|^2 - m^2 < 0 \end{cases} \tag{1}$$

y

$$(|x|^2 - m^2)_-^\lambda = \begin{cases} (-(|x|^2 - m^2))^\lambda & if \quad |x|^2 - m^2 \leq 0 \\ 0 & if \quad |x|^2 - m^2 > 0 \end{cases} \tag{2}$$

donde m es un número real positivo y λ es un número complejo.

Las distribuciones $\delta^{(k)}(m^2 - |x|^2)$ y $\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)$ son definidas en ([5], página 341) en la siguiente forma:

$$\delta^{(k)}(m^2 - |x|^2) = \lim_{\alpha \to -k} \frac{(m^2 - |x|^2)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tag{3}$$

y

$$\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2) = (-1)^k \lim_{\alpha \to -k} \frac{(m^2 - |x|^2)_-^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tag{4}$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es la función gama definida por:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx \tag{5}$$

y

$$\operatorname{Re}s_{\alpha=-k}\Gamma(\alpha) = \frac{(-1)^k}{k!} \tag{6}$$

([4], página 344).

Por otra parte, en este artículo necesitamos la siguiente fórmula:

$$\{\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)\}^\wedge = \frac{(-1)^k m^{n-2k-2}}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{j\geq 0} \frac{(-|x|^2) m^{2j}}{2^{2j}\, j!\, \Gamma(\frac{n}{2} + j - k)} \text{ para } n \text{ par si } k < \frac{n}{2} \tag{7}$$

$$\{\delta^{(k)}(|x|^2-m^2)\}^\wedge = \frac{(-1)^k m^{n-2k-2}}{2^{\frac{n}{2}}}\sum_{j\geq 0}\frac{(-|y|^2)^j m^{2j}}{2^{2j}\, j!\Gamma(\frac{n}{2}+j-k)} \text{ para } n \text{ par si } k \geq \frac{n}{2} \tag{8}$$

([5], páginas 341-342).

Aquí el símbolo $\wedge$ designa la transformada de Fourier:

$$\{f\}^\wedge = \int_{R^n} e^{<x,y>} f(x)dx \tag{9}$$

y $<x,y>= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots x_n y_n.$

Ahora usando la fórmula

$$\{\Delta^j \delta\}^\wedge = (-1)^j (|y|^2)^j \tag{10}$$

([2]), página 201), donde Δ^j es el laplaciano iterado j veces definido por

$$\Delta^j = \{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\}^j \tag{11}$$

y

$$|y|^2 = y_1^2 + \ldots y_n^2. \tag{12}$$

De (8) y (9), se tiene:

$$\{\delta^{(k)}(|x|^2-m^2)\}^\wedge = \frac{(-1)^k m^{n-2k-2}}{2^{\frac{n}{2}}}\sum_{j\geq 0}\{\frac{(m^2)^j \Delta^j \delta}{2^{2j}\, j!\Gamma(\frac{n}{2}+j-k)}\}^\wedge \tag{13}$$

$$\text{para } n \text{ par si } k < \tfrac{n}{2}$$

y

$$\{\delta^{(k)}(|x|^2-m^2)\}^\wedge = \frac{(-1)^k m^{n-2k-2}}{2^{\frac{n}{2}}}\sum_{j\geq k-\frac{n}{2}+1}\{\frac{(m^2)^j \Delta^j \delta}{2^{2j}\, j!\Gamma(\frac{n}{2}+j-k)}\}^\wedge \tag{14}$$

$$\text{para } n \text{ par si } k \geq \tfrac{n}{2}.$$

De (13) y (14) se tiene,

$$\{\delta^{(k)}(|x|^2-m^2)\} = \frac{(-1)^k}{2^{\frac{n}{2}}}\sum_{j\geq o}\{\frac{(m^2)^j \Delta^j \delta}{2^{2j}\, j!\Gamma(\frac{n}{2}+j-k)}\} \tag{15}$$

$$\text{para } n \text{ par si } k < \tfrac{n}{2}$$

y

$$\{\delta^{(k)}(|x|^2-m^2)\} = \frac{(-1)^k}{2^{\frac{n}{2}}}.\sum_{l\geq k-\frac{n}{2}+1}\{\frac{(m^2)^l \Delta^{l-\frac{n}{2}+k+1}\delta}{4^{l-\frac{n}{2}+k+1}\, l!(l+k+1-\frac{n}{2})!}\} \tag{16}$$

$$\text{para } n \text{ par si } k \geq \tfrac{n}{2}+1.$$

Las fórmulas (15) y (16) aparecen en ([5]), página 74, formula (21) y (22) respectivamente.

Haciendo $m^2 = 0$ en (15) y (16) y usando la propiedad $\Delta^0 \delta = \delta,$ tenemos la siguiente fórmula:

$$\delta^{(\frac{n}{2}-1)}(|x|^2) = (-1)^{\frac{n}{2}-1} \pi^{\frac{n}{2}} \delta(x) \text{ si } n \text{ es par,} \tag{17}$$

$$\delta^{(k)}(|x|^2) = \frac{(-1)^k \pi^{\frac{n}{2}}}{(k-\frac{n}{2}+1)! 4^{k-\frac{n}{2}+1}} \Delta^{k-\frac{n}{2}+1} \delta \text{ si } n \text{ es par y } k \geq \frac{n}{2}+1 . \tag{18}$$

Usando que $\Delta^0 \delta = \delta$ tenemos la siguiente fórmula:

$$\delta^{(k)}(|x|^2) = \frac{(-1)^k \pi^{\frac{n}{2}}}{(k-\frac{n}{2}+1)! 4^{k-\frac{n}{2}+1}} \Delta^{k-\frac{n}{2}+1} \delta \text{ si } n \text{ es par y } k \geq \frac{n}{2}-1 \tag{19}$$

donde $|x|^2 = x_1^2 + \ldots x_n^2.$

La fórmula (9), aparece en ([5], página 74, fórmula 24).

En este artículo, obtenemos una expansión en series (tipo Taylor) de la distribución $\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)$ y se obtiene una nueva expresión para el producto de convolución de $\{\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)\} * \{\delta^{(t)}(|x|^2 - m^2)\}$. Otras expresiones para el producto de convolución aparecen en ([5]).

EL PRODUCTO DE CONVOLUCIÓN $\{\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)\} * \{\delta^{(t)}(|x|^2 - m^2)\}$

En este párrafo el símbolo $*$ significa convolución.
Ahora, vamos a demostrar el siguiente lemma:

Lemma 1:
Sea n la dimensión par del espacio y k un entero no negativo entonces la siguiente fórmula es válida

$$\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2) = \sum_{l \geq o} \frac{(-m^2)^l}{l!} \delta^{(k+l)}(|x|^2) \tag{20}$$

La demostración del lemma 1 es consecuencia de la fórmula 16 y la fórmula 19. En efecto, haciendo $\nu = l - k + \frac{n}{2} - 1$ en (16) y usando (19) se obtiene

$$\{\delta^{(k)}(|x|^2 - m^2)\} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{l \geq o} \frac{2^{\frac{n}{2}} (m^2)^\nu (-1)^{-k-\nu} (\nu - \frac{n}{2} + k + 1)! 4^{\nu - \frac{n}{2} + k + 1} \delta^{(k+\nu)}(|x|^2)}{4^{\nu - \frac{n}{2} + k + 1} \nu! (\nu - \frac{n}{2} + k + 1)!} =$$

$$\sum_{l \geq o} \frac{(-m^2)^\nu}{\nu!} \delta^{(k+\nu)}(|x|^2).$$

Lemma 2:
Sea n dimensión par del espacio, k,t enteros no negativos tales que $k \geq \frac{n}{2}$ y $t \geq \frac{n}{2}$ entonces la siguiente fórmula es válida

$$\{\delta^{(k)}(|x|^2)\} * \{\delta^{(t)}(|x|^2)\} = \quad (-1)^{\frac{n}{2}-1}\pi^{\frac{n}{2}}. \\ \frac{(k+t-n+2)!}{(k-\frac{n}{2}+1)(t-\frac{n}{2}+1)!}\delta^{(k+t-\frac{n}{2}+1)}(|x|^2). \tag{21}$$

Se sabe que ([5], página 75), la siguiente fórmula es válida

$$\Delta^t\{\delta(x)\}\delta * \Delta^s\{\delta(x)\} = ?^{t+s}\{\delta(x)\} \tag{22}$$

para t y s enteros no negativos.

Ahora de (19) y usando (22) se tiene,

$$\begin{aligned} &\delta^{(k)}(|x|^2) * \delta^{(t)}(|x|^2) = \\ &\frac{(-1)^{k+t}\pi^n}{4^{k+l-n+2}(k-\frac{n}{2}+1)!(t-\frac{n}{2}+1)!}\left(\Delta^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\}\delta * \Delta^{t-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\}\right) = \\ &\frac{(-1)^{k+t}\pi^n}{4^{k+l-n+2}(k-\frac{n}{2}+1)!(t-\frac{n}{2}+1)!}\Delta^{k+t-\frac{n}{2}+1-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} = \\ &\frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}\pi^{\frac{n}{2}}(k+t-n+2)!}{(k-\frac{n}{2}+1)!(t-\frac{n}{2}+1)!}\Delta^{(k+t-\frac{n}{2}+1)}(|x|^2) \end{aligned} \tag{23}$$

si $k \geq \frac{n}{2}-1$ y $t \geq \frac{n}{2}-1$.

De (23) se obtiene la fórmula (21).

Teorema:
Sea n la dimensión par del espacio, k,t enteros no negativos tales que $k \geq \frac{n}{2}$ y $t \geq \frac{n}{2}$ entonces la siguiente fórmula es válida

$$\delta^{(k)}(m^2-|x|^2) * \delta^{(t)}(m^2-|x|^2) = \sum_{p\geq 0} A_{r,t,n,p}\delta^{(k+t+p-\frac{n}{2}+1)}(|x|^2) \tag{24}$$

donde

$$A_{r,t,n,p} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}\pi^{\frac{n}{2}}(k+t+p-n+2)!}{p!(k-\frac{n}{2}+p+1)!(t-\frac{n}{2}+p+1)!} \tag{25}$$

Demostración:

De (16) y considerando (23) se tiene,

$$
\begin{aligned}
&\delta^{(k)}(m^2-|x|^2)*\delta^{(t)}(m^2-|x|^2)= \\
&\textstyle\sum_{l\geq 0}\sum_{j\geq 0}\frac{(-m^2)}{l!j!}^{l+j}\left[\delta^{(k+l)}(|x|^2)*\delta^{(t+j)}(|x|^2)\right]= \\
&(-1)^{\frac{n}{2}-1}\pi^{\frac{n}{2}}\textstyle\sum_{p\geq 0}(-\frac{m^2}{4})^p(k+t+p-n+2)!. \\
&\textstyle\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{j!(p-j)!(k+p-j-\frac{n}{2}+1)!(t+j-\frac{n}{2}+1)!}\delta^{(k+t+p-\frac{n}{2}+1)}(|x|^2).
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Usando la fórmula

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{j=0}^{p}\frac{1}{j!(p-j)!(k+p-j-\frac{n}{2}+1)!(t+j-\frac{n}{2}+1)!}= \\
&\frac{1}{(k+p-\frac{n}{2}+1)!(t+p-\frac{n}{2}+1)!}.\textstyle\sum_{j=0}^{p}\begin{pmatrix}k-\frac{n}{2}+1+p\\ j\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}t-\frac{n}{2}+1+p\\ p-j\end{pmatrix}= \\
&\frac{1}{(k+p-\frac{n}{2}+1)!(t+p-\frac{n}{2}+1)!}\begin{pmatrix}k-\frac{n}{2}+1+t-\frac{n}{2}+1+2p\\ p\end{pmatrix}= \\
&\frac{(k+t-n+2p+2)!}{(k+p-\frac{n}{2}+1)!(t+p-\frac{n}{2}+1)!}.\frac{1}{p!(k+t-n+p+2)!},
\end{aligned}
\tag{27}
$$

donde

$$
\begin{pmatrix}t\\ j\end{pmatrix}=\frac{t!}{j!(t-j)!}. \tag{28}
$$

Reemplazando (27) en (26) se tiene,

$$
\begin{aligned}
&\{\delta^{(k)}(|x|^2-m^2)\}*\{\delta^{(t)}(|x|^2-m^2)\}= \quad (-1)^{\frac{n}{2}-1}\pi^{\frac{n}{2}}. \\
&\textstyle\sum_{p\geq 0}\frac{(k+t-n+2p+2)!}{(k+p-\frac{n}{2}+1)!(t+p-\frac{n}{2}+1)!}\frac{(-m^2)^p}{p!}\delta^{(k+t+p-\frac{n}{2}+1)}(|x|^2)
\end{aligned}
\tag{29}
$$

De (29) se concluye la demostración del teorema.
Es claro que haciendo $m^2=0$ en (24) bajo las condiciones $k\geq\frac{n}{2}-1, t\geq\frac{n}{2}-1$ y n par, se obtiene la fórmula (23).

REFERENCIAS

[1] Aguirre M. (1997) *The distribution* $\delta^{(k)}(P \pm i0)$, Journal of Computational and Applied Math. (88) pp. 309-348, Elservier, N.H.

[2] L Gelfand, I. and Shilov, G. *Generalized Functions*, Vol. I, Academic Press, New York, 1964.

[3] Schwartz, L. *Theorie the Distributions*, Herman, Paris, 1966.

[4] Erdelchi, A. *Higher Trascendental Functions*, Vol. I and II, McGraw-Hill, New York, 1953.

[5] Erdelchi Aguirre T. Manuel., *Distributional convolution product between the* $k-th$ *derivative of Dirac's delta in* $|x|^2 - m^2$, Integral Transforms and Special Functions, 2000, vol. 10, No. 1, pp. 71-80.

Manuel A. Aguirre, es Profesor y Decano de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada-NUCOMPA
Facultad de Ciencias Exactas UNCentro
Paraje Arroyo Seco, 7000-Tandil
Provincia de Buenos Aires, Argentina
Tel.: +54 2293 439657
E-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar