Nexo Revista Científica
Vol. 24, No. 02, pp.130-134/Diciembre 2011

ISSN-L 1818-6742
Impreso en Nicaragua.
http://revistasnicaragua.peri.net.ni/index.php/nexo/index

El producto distribucional de $N_\lambda(x).N_\mu(x)$

Marta García & Manuel Aguirre*

Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada-NUCOMPA
Facultad de Ciencias Exactas UNCentro, Pinto 399,
7000 Tandil, Argentina.
e-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar

(recibido/received: 20-Septiembre-2011; aceptado/accepted: 09-Diciembre-2011)

RESUMEN

En este artículo se le da un sentido al producto distribucional entre $N_\lambda(x)$ y $N_\mu(x)$ usando la transformada de Fouriere de $N_\mu(x)$. Como consecuencia se obtienen este producto multiplicativo por medio de una serie de derivadas de la delta de Dirac en x. En particular se obtiene el producto multiplicativo $\delta^{(k-1)}(1-x^2).\delta^{(l-1)}(1-x^2)$ (ver fórmula (21))

Palabras claves: Distribuciones, producto de distribuciones, delta de Dirac.

ABSTRACT

In this paper we give a sense to the distribution product of $N_\lambda(x)$ and $N_\mu(x)$ using the Fourier transform of $N_\lambda(x)$. As consequence we obtain this formula to multiplicative product by means of serie of derivatives of Dirac's delta in x. In particular we obtain the multiplicative product $\delta^{(k-1)}(1-x^2).\delta^{(l-1)}(1-x^2)$ (see formula (21)).

Keywords: Distributions, Product of distributions, Dirac`s delta.

*Este trabajo es soportado parcialmente por la Comisión de Investigaciones Científicas (C.I.C.) de la Provincia de Buenos Aires, Argentina.

INTRODUCCIÓN

Sea x un punto de R y λ un punto de C, donde con R se designa el conjunto de los números reales y con C el conjunto de los números complejos. Sea $\left(1-x^2\right)_+^\lambda$ la función definida por

$$\left(1-x^2\right)_+^\lambda = \begin{cases} \left(1-x^2\right)^\lambda & \text{si} \quad 1-x^2 > 0 \\ 0 & \text{si} \quad 1-x^2 \leq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Consideremos la familia de funciones distribucionales $N_\lambda(x)$ definida por

$$N_\lambda(x) = \frac{\left(1-x^2\right)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \tag{2}$$

Donde $\Gamma(z)$ es la función gama, definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} \; t^{z-1} \, dt \tag{3}$$

$N_\lambda(x)$ define una función generalizada entera de λ , homogénea de grado 2λ (ver [G], p.78) y tomando en cuenta que cada distribución homogénea es temperada([D], p.154-155), se deduce que $N_\lambda(x)$ define una distribución temperada. Usando la transformada de Fourier de $N_\lambda(x)$, se le da un sentido al producto distribucional

$$N_\lambda(x) . N_\mu(x) \tag{4}$$

donde μ es un número complejo y $N_\mu(x)$ es definida por (2).

Transformada de Fourier de $N_\lambda(x)$

Sabemos que la siguiente fórmula es válida

$$N_{-k}(x) = \lim_{\lambda \to -k} N_\lambda(x) = \lim_{\lambda \to -k} \frac{\left(1-x^2\right)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} = \delta^{(k-1)}\left(1-x^2\right) \qquad (, \text{p}.186) \tag{5}$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

donde $\delta^{(k)}\left(1-x^2\right)$ es la derivada de orden k de la delta de Dirac soportada en $\left(1-x^2\right)$.
Por otra parte de([M], p. 68, fórmula 11) se tiene,

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{(1-x^2)_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \right\} = \sqrt{\pi} \sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma\left(\lambda + j + \frac{3}{2}\right) 2^{2j}} (\sigma + i0)^{2j} \tag{6}$$

De $(\text{ref: } 2)$ y usando (6), se tiene,

$$\mathbf{F}\{N_\lambda(x)\} = \sqrt{\pi}\sum_{j\geq 0}\frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma\left(\lambda + j + \frac{3}{2}\right)2^{2j}}\sigma^{2j}. \tag{7}$$

La fórmula $(\text{ref: }7)$ expresa la transformada de Fourier de $N_\lambda(x)$.
Usando la siguiente la siguiente propiedad(ver [G], p.359)

$$\mathbf{F}\{\delta^{(2m)}(x)\} = (-1)^m \sigma^{2m} \tag{8}$$

la fórmula (7) puede escribirse de la siguiente forma

$$\mathcal{F}\{N_\lambda(x)\} = \sum_{j\geq 0} a_{j,\,\lambda}\ \mathcal{F}\{\delta^{(2j)}(x)\} \tag{9}$$

donde

$$a_{j,\,\lambda} = \frac{\sqrt{\pi}}{j!\,\Gamma\left(\lambda + j + \frac{3}{2}\right)2^{2j}} \tag{10}$$

Tomando en cuenta que $N_\lambda(x)$ es una función generalizada entera de λ, homogénea de grado 2λ y considerando que cada función homogénea es temperada ([D], p.154-155), usando el teorema clásico de Laurent Schwartz ([S], p. 286-form. VII. 8.5) se tiene,

$$\mathcal{F}\{N_\lambda(x).N_\mu(x)\} = 2\pi\mathcal{F}\{N_\lambda(x)\} \ast \mathcal{F}\{N_\mu(x)\} \tag{11}$$

Definición 1. Sea N_λ y N_μ las familias de funciones distribucionales definidas por (2), tomando en cuenta la fórmula (9), se define el producto multiplicativo entre $N_\lambda(x)$ y $N_\mu(x)$ por medio de la siguiente fórmula:

$$N_\lambda(x).N_\mu(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{N_\lambda(x)\} \ast \mathcal{F}\{N_\mu(x)\}\} \tag{12}$$

De (11) y usando (9) se tiene,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{N_\lambda(x)\} \ast \mathcal{F}\{N_\mu(x)\} &= \sum_{j\geq 0} a_{j,\,\lambda}\ \mathcal{F}\{\delta^{(2j)}(x)\} \ast \sum_{k\geq 0} a_{k,\,\mu}\ \mathcal{F}\{\delta^{(2k)}(x)\} \\ &= \sum_{j\geq 0}\sum_{k\geq 0} a_{j,\,\lambda}\, a_{k,\,\mu}[\mathcal{F}\{\delta^{(2j)}(x)\} \ast \mathcal{F}\{\delta^{(2k)}(x)\}]\end{aligned} \tag{13}$$

donde

$$a_{k,\,\mu} = \frac{\sqrt{\pi}}{k!\,\Gamma\left(\mu + k + \frac{3}{2}\right)2^{2k}}. \tag{14}$$

De (13) se tiene,

$$\mathcal{F}\{N_\lambda(x)\} * \mathcal{F}\{N_\mu(x)\} = \sum_{n\geq 0}\sum_{j=0}^{n} a_{j,\lambda}\, a_{n-j,\mu}\ \mathcal{F}\left\{\delta^{(2j)}(x)\ .\ \delta^{\left(2\ (n-j)\right)}(x)\right\} \tag{15}$$

donde $j+k=n.$

Ahora usando la definición 1 y considerando que la transformada de Fourier es una función continua se tiene,

$$\begin{aligned} N_\lambda(x).N_\mu(x) &= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{N_\lambda(x)\} * \mathcal{F}\{N_\mu(x)\}\} \\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{j=0}^{n} a_j a_{n-j}\mathcal{F}^{-1}\left\{\mathcal{F}\left\{\delta^{(2j)}(x)\ .\ \delta^{\left(2\ (n-j)\right)}(x)\right\}\right\} \end{aligned} \tag{16}$$

$$N_\lambda(x).N_\mu(x) = \sum_{n\geq 0}\sum_{j=0}^{n} a_{j,\lambda} a_{n-j,\mu}\ \ \delta^{(2j)}(x)\ .\ \delta^{\left(2\ (n-j)\right)}(x) \tag{17}$$

Por otra parte sabemos que Aguirre en ([3], p.186) le da un sentido al producto distribucional de $\delta^{(l)}(x).\delta^{(m)}(x)$, obteniendo la fórmula:

$$\delta^{(p-1)}(x).\delta^{(l-1)}(x) = 2\pi\,\frac{(p+l)!}{(p)!\,(l)!}\,\delta^{(p+l-1)}(x) \tag{18}$$

para $p,l = 1,23,\ldots$

Usando la fórmula (18), de(17), obtenemos la siguiente fórmula:

$$N_\lambda(x).N_\mu(x) = \sum_{n\ \geq\ 0} C_{\lambda,\ \mu,\ n,\ j}\ \ \delta^{(2n+1)}(x) \tag{19}$$

donde

$$C_{\lambda,\ \mu,\ n,\ j} = \sum_{j\ =\ 0}^{n} a_{j,\lambda} a_{n-j,\ \mu}\ \ \frac{(2n+2)!}{(2(n-j)+1)!\,(2j+1)!} \tag{20}$$

La fórmula (19) expresa el producto multiplicativo entre $N_\lambda(x)$ y $N_\mu(x)$ por medio de una serie de derivadas de la delta de Dirac en $x.$

En particular de (19), usando la fórmula (5) se obtiene el producto de las derivadas de la delta soportadas en $1-x^2$.

$$\begin{aligned} &\delta^{(k-1)}(1-x^2).\delta^{(l-1)}(1-x^2) = N_{-k}(x).N_{-l}(x) = \\ &= \textstyle\sum_{n\ \geq\ 0} C_{-k,\ -l,\ n,\ j}\ \ \delta^{(2n+1)}(x) \end{aligned} \tag{21}$$

donde

$$C_{-k,\,-l,\,n,\,j} = \sum_{j=0}^{n} a_{j,\,-k}\, a_{n-j,\,-l} \;\frac{(2n+2)!}{(2(n-j)+1)!(2j+1)!} \tag{22}$$

y $a_{j,\,\beta}$ es definido por la fórmula (10).

REFERENCIAS

[1] Gelfand I. M., and Shilov G. E., *Generalized Functions*- Vol. I - Academic Press . 1964

[2] Schwartz L., *Theorie des Distributions* − Hermann, París. 1973

[3] Aguirre M., *Formulae relationship to the distributional product of* $\delta^{(k-1)}(x).\delta^{(l-1)}(x)$ and $\delta^{(k-1)}(x-a).\delta^{(l-1)}(x-b)$ -International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 53, Nº 2. 2009.

[4] Donoghue W. F. , *Distributions and Fourier Transform* - Academic Press, New York . 1969.

[5] García M., and Aguirre M., *The Convolution Product of* $\delta^{(k-1)}(1-x^2) * \delta^{(l-1)}(1-x^2)$ - Nexo Revista Científica . Universidad Nacional de Ingeniería, Managua, Nicaragua- Vol. 22, Nº02 . 2009

Manuel A. Aguirre, Profesor y Decano
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro de la Prov. de Buenos Aires
Paraje Arroyo Seco, 7000-Tandil
Provincia de Buenos Aires, Argentina
Tel.: +54 2293 439657
E-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar