Nexo Revista Científica

Vol.21, No.2, pp.60-76/Abril 2009

ISSN 1818-6742
Impreso en Nicaragua.
www.uni.edu.ni/Nexo

El producto de convolución de la derivada de orden de la delta de Dirac en un hipercono

Manuel A. Aguirre T.*
Núcleo Consolidado de Matemática
Pura y Aplicada
Facultad de Ciencias Exactas
UNCentro,Pinto 399,
7000 Tandil,
Argentina.
E-mail:maguirre@exa.unicen.edu.ar

(recibido/received: 14-Oct-2008; aceptado/accepted: 27-Marzo-2009)

RESUMEN

En este artículo se le da un sentido a los productos de convolución de $\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+), \delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-)$, $\delta_1^{(k)}(P) * \delta_1^{(l)}(P)$ y $\delta_2^{(k)}(P) * \delta_2^{(l)}(P)$. En la primer sección, se le da un sentido a los productos $\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+)$ y $\delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-)$ para n impar y para el caso n par hay que agregar la condiciones $k < \frac{n}{2} - 1$ y $l < \frac{n}{2} - 1$. En la segunda sección, se le da un sentido a los productos $\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+)$, $\delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-), \delta_1^{(k)}(P) * \delta_1^{(l)}(P)$ y $\delta_2^{(k)}(P) * \delta_2^{(l)}(P)$ bajo las condiciones n par, $k \geq \frac{n}{2} - 1$ y $l \geq \frac{n}{2} - 1$.

Palabras clave: Teoría de distribuciones
AMS Clasificación de Temas: 46F10, 46F12

ABSTRACT

In this paper we give a sense to distributional convolution products of $\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+), \delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-)$, $\delta_1^{(k)}(P) * \delta_1^{(l)}(P)$ and $\delta_2^{(k)}(P) * \delta_2^{(l)}(P)$. The first section, we give a sense to products of $\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+)$ and $\delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-)$ for odd n, as well as for even n if $k < \frac{n}{2} - 1$ and $l < \frac{n}{2} - 1$. In the second section, we give a sense to products $\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+)$, $\delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-), \delta_1^{(k)}(P) * \delta_1^{(l)}(P)$ and $\delta_2^{(k)}(P) * \delta_2^{(l)}(P)$ under conditions n even, $k \geq \frac{n}{2} - 1$ and $l \geq \frac{n}{2} - 1$.

* Trabajo apoyado en parte por la Comisión de Investigaciones Científicas (C.I.C./Argentina).

Keywords: Theory of Distributions
AMS Subject Classification: 46F10, 46F12

.

1. Introducción.

Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un punto en el espacio $n-$ dimensional Euclideano R^n .
Consideremos una forma cuadrática en n variables definida por

$$P = P(x) = x_1^2 + \cdots x_p^2 - x_{p+1}^2 \cdots - x_{p+q}^2 \tag{1}$$

donde $p + q = n$ es la dimensión del espacio.
Llamamos C^∞ al espacio $\varphi(x)$ de funciones infinitamente derivables y con soporte compacto definidas de R^n en R .
De ([1]), página 253, fórmula (2)), la distribución P_+^λ es definida por

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \int_{P>0} (P(x))^\lambda \varphi(x) dx \tag{2}$$

donde λ es un número complejo y $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$. Para $Real(\lambda) \geq 0$, esta integral converge y es una función analítica de λ. La prolongación analítica a la parte Real $(\lambda) < 0$ puede ser usada para extender la definición de (P_+^λ, φ) . Más aún de ([Gelfand], página 254), se tiene,

$$(P_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty u^{\lambda + \frac{p+q}{2} - 1} \ {}_q\Phi_\lambda(u) du \tag{3}$$

donde

$${}_q\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{4} \int_0^\infty t^{\frac{q-2}{2}} (1-t)^\lambda \phi_1(u, tu) dt \tag{4}$$

$$\phi(r, s) = \phi_1(u, v) \tag{5}$$

$$\phi(r, s) = \int \varphi d\Omega_p d\Omega_q \tag{6}$$

$$r = \sqrt[2]{x_1^2 + \ldots + x_p^2} \quad \text{and} \quad s = \sqrt[2]{x_{p+1}^2 + \ldots + x_{p+q}^2} \tag{7}$$

Aquí, $d\Omega_p$ y $d\Omega_q$ son los elementos de áreas de la superficie en la esfera unitaria en R^p y R^q respectivamente.

En forma similar podemos también definir la función generalizada P_-^λ por

$$(P_-^\lambda, \varphi) = \int_{-P>0} (-P(x))^\lambda \varphi(x) dx \tag{8}$$

Más aún se obtiene

$$(P_-^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty v^{\lambda + \frac{p+q}{2} - 1} \ {}_p\Phi_\lambda(v) dv \tag{9}$$

donde

$$ {}_p\Phi_\lambda(u) = \frac{1}{4}\int_0^\infty t^{\frac{p-2}{2}}(1-t)^\lambda \phi_1(vt,v)dt. \qquad (10)$$

De (1) la ecuación de la hipersuperficie $P = 0$ define un hipercono con un punto singular (el vértice) en el origen.
Por otro lado, de ([1], página 249), se tiene,

$$(\delta^{(k)}(P),\varphi) = \int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial}{2s\partial s}\right)^k \left\{ s^{q-2}\frac{\phi(r,s)}{2} \right\} \right]_{s=r} r^{p-1}dr \qquad (11)$$

y

$$(\delta^{(k)}(P),\varphi) = (-1)^k \int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial}{2r\partial r}\right)^k \left\{ r^{p-2}\frac{\phi(r,s)}{2} \right\} \right]_{r=s} s^{q-1}ds \qquad (12)$$

donde $\phi(r,s)$ es definida por la ecuación (6).
También de ([1], página 250), las funciones generalizadas $\delta_1^{(k)}(P)$ y $\delta_2^{(k)}(P)$ están definidas por

$$\left(\delta_1^{(k)}(P),\varphi\right) = \int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial}{2s\partial s}\right)^k \left\{ s^{q-2}\frac{\phi(r,s)}{2} \right\} \right]_{s=r} r^{p-1}dr \qquad (13)$$

y

$$\left(\delta_2^{(k)}(P),\varphi\right) = (-1)^k \int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial}{2r\partial r}\right)^k \left\{ r^{p-2}\frac{\phi(r,s)}{2} \right\} \right]_{r=s} s^{q-1}ds \qquad (14)$$

donde $\phi(r,s)$ es $r^{1-p}s^{1-q}$ multiplicada por la integral de φ sobre la superficie $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 = r^2$ y $x_{p+1}^2 + \cdots + x_{p+q}^2 = s^2$.
Las integrales convergen y coinciden para

$$k < \frac{p+q-2}{2}. \qquad (15)$$

Si, por otra parte,

$$k \geq \frac{p+q-2}{2} \qquad (16)$$

esas integrales deberían entenderse en el sentido de la regularización (ver [1], página 250).
Ahora en general $\delta_1^{(k)}(P)$ y $\delta_2^{(k)}(P)$ pueden no ser la misma función generalizada.
Note que la definición de estas funciones generalizadas implica que en cualquier caso

$$\delta_2^{(k)}(P) = (-1)^k\delta_1^{(k)}(-P). \qquad (17)$$

De ([1]), página 278), las siguientes fórmulas son válidas,

$$\delta^{(k)}(P_+) = (-1)^k k!\,\mathrm{Res}_{\lambda=-k-1}P_+^\lambda \qquad (18)$$

y

$$\delta^{(k)}(P_-) = (-1)^k k! \operatorname{Res}_{\lambda=-k-1} P_-^{\lambda} \; . \tag{19}$$

Por otra parte, de ([1] página 278), para n impar y para n par pero bajo la condición $k < \frac{n}{2} - 1$ se tiene,

$$\delta^{(k)}(P_+) = \delta_1^{(k)}(P) = \delta^{(k)}(P) \tag{20}$$

y

$$\delta^{(k)}(P_-) = \delta_1^{(k)}(-P). \tag{21}$$

Mientras que en el caso en que la dimensión n sea par y $k \geq \frac{n}{2} - 1$

$$\delta^{(k)}(P_+) - \delta_1^{(k)}(P) \tag{22}$$

y

$$\delta^{(k)}(P_-) - \delta_1^{(k)}(-P) \tag{23}$$

son funciones generalizadas concentradas en el vértice del cono $P = 0$ ([1], página 279).
De([1], página 279), se tiene:
Si p y q son pares y si $k \geq \frac{n}{2} - 1$, entonces

$$(-1)^k \delta^{(k)}(P_+) - \delta^{(k)}(P_-) = a_{q,n,k} L^{k+1-\frac{n}{2}} \{\delta(x)\} \tag{24}$$

mientras que en todos los otros casos

$$\delta^{(k)}(P_-) = (-1)^k \delta^{(k)}(P_+) \; . \tag{25}$$

En (25)

$$a_{q,n,k} = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{4^{k-\frac{n}{2}+1} (k - \frac{n}{2} + 1)!} \tag{26}$$

y L^j es el operador diferencial lineal homogéneo iterado j veces,

$$L^j = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \right\}^j \tag{27}$$

es decir, es el operador ultrahiperbólico $L = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \right\}$ iterado j veces.
De([1], página 255), (P_+^{λ}, φ) tiene dos conjuntos de singularidades a saber:

$$\lambda = -1, -2, -3, \ldots \tag{28}$$

y

$$\lambda = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} - 1, \ldots \tag{29}$$

y de ([1], páginas 256-269 y página 352), se tiene,

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-k-1} P_+^\lambda = \frac{(-1)^k}{k!}\delta_1^{(k)}(P) \text{ si } p \text{ es par y } q \text{ es impar}$$

(30)

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-k-1} P_+^\lambda = \frac{(-1)^k}{k!}\delta_1^{(k)}(P) \text{ si } p \text{ es impar y } q \text{ es par,}$$

(31)

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} P_+^\lambda = 0 \text{ si } p \text{ es par y } q \text{ es impar}$$

(32)

y

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)} L^k\{\delta(x)\} \text{ si } p \text{ es impar y } q \text{ es par} \tag{33}$$

Donde L^k es el operador ultra hiperbólico iterado k -veces definido por medio de la fórmula (28). En forma similar (P_-^λ, φ) tiene singularidades en los mismos puntos que (P_+^λ, φ) y tomando en cuenta que todo lo que se dice acerca de P_+^λ también vale para P_-^λ excepto que p y q debe ser intercambiados, y en todas las fórmulas que corresponde a $\delta_1^{(k)}(P)$ deben ser reemplazadas por

$$\delta_1^{(k)}(-P) = (-1)^k \delta_2^{(k)}(P) \tag{34}$$

y (L) por $(-L)$ (ver [1], páginas 279 y 352), luego se tiene,

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-k-1} P_-^\lambda = \frac{(-1)^k}{k!}\delta_1^{(k)}(-P) \text{ si } p \text{ es impar y } q \text{ par} \tag{35}$$

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-k-1} P_-^\lambda = \frac{(-1)^k}{k!}\delta_1^{(k)}(-P) \text{ si } p \text{ es par y } q \text{ impar}$$

(36)

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} P_-^\lambda = 0 \text{ si } p \text{ es impar y } q \text{ par}$$

(37)

y

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} P_-^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{p}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)} (-L)^k\{\delta(x)\} \text{ si } p \text{ es par y } q \text{ impar.} \tag{38}$$

Si la dimensión del espacio n es par y p y q son pares, P_+^λ tiene polos simples en $\lambda = -\frac{n}{2} - k,$ donde k es un entero no-negativo, y el residuo es dado por la siguiente fórmula

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k, k=0,1,2,..} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)}\delta_1^{(\frac{n}{2}+k-1)}(P) +$$

(39)

$$+\frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k!\Gamma(\frac{n}{2}+k)} L^k\{\delta(x)\}$$

([1], página 268), donde L^k es definido por (28).

Si, por otra parte, p y q son impares, P_+^λ tiene polo de orden 2 en $\lambda = -\frac{n}{2} - k$ y de ([1], página 269), se tiene

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} P_+^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)} \delta_1^{(\frac{n}{2}+k-1)}(P) + \tag{40}$$

$$+\frac{(-)^{\frac{q+1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1}}{2^{2k} k! \Gamma(\frac{n}{2}+k)} \left[\psi(\tfrac{p}{2}) - \psi(\tfrac{n}{2})\right] L^k\{\delta(x)\}$$

donde

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

y $\Gamma(x)$ es la función gama definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-z} z^{x-1} dz \tag{41}$$

Para valores enteros y valores fraccionarios la función $\psi(x)$ está dada por:

$$\psi(k) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k-1} \tag{42}$$

$$\psi(k+\tfrac{1}{2}) = -\gamma - 2\ln(2) + 2\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k-1}\right) \tag{43}$$

donde γ es la constante de Euler.
En forma similar

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} P_-^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)} \delta_1^{(\frac{n}{2}+k-1)}(-P) + \tag{44}$$

$$+\frac{(-1)^{\frac{p}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{4^k k! \Gamma(\frac{n}{2}+k)} (-L)^k \{\delta(x\} \text{si } p \text{ y } q \text{ son impares.}$$

y

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-\frac{n}{2}-k} P_-^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+k-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+k)} \delta_1^{(\frac{n}{2}+k-1)}(-P) +$$

$$+\frac{(-)^{\frac{p+1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1}}{2^{2k} k! \Gamma(\frac{n}{2}+k)}$$

$$\left[\psi(\tfrac{q}{2}) - \psi(\tfrac{n}{2})\right] (-L)^k \{\delta(x)\} \text{si } p \text{ y } q \text{ son impar.}$$

En este artículo se le da un sentido a los siguientes productos distribucionales:

$$\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+)$$

$$\delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-)$$

$$\delta_1^{(k)}(P) * \delta_1^{(l)}(P)$$

y

$$\delta_2^{(k)}(P) * \delta_2^{(l)}(P)$$

Los resultados se dividen en dos secciones. En la primera sección se le da un sentido a los siguientes productos de convolución:

$$\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+)$$

y

$$\delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-).$$

para n impar, y para n par si $k < \frac{n}{2} - 1$.
En la segunda sección se le da un sentido a los productos distribucionales

$$\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+)$$

$$\delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(k)}(P_-)$$

$$\delta_1^{(k)}(P) * \delta_1^{(l)}(P)$$

y

$$\delta_2^{(k)}(P) * \delta_2^{(l)}(P)$$

bajo las condiciones n par, $k \geq \frac{n}{2} - 1$ y $l \geq \frac{n}{2} - 1$.

2. Los productos de la convolución $\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+)$ y $\delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-)$.

Para obtener dichos productos de convolución se necesitan las siguientes fórmulas:

$$\left\{ \frac{P_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \right\}^\wedge = -a_{\lambda,n.i} e^{-\frac{q\pi i}{2}} (Q - i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}} - e^{\frac{q\pi i}{2}} (Q + i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}} \quad (45)$$

([1], página 284 fórmula 4) y

$$\left\{ \frac{P_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} \right\}^\wedge = a_{\lambda,n.i} e^{-(\lambda+\frac{q}{2})\pi i} (Q - i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}} - e^{(\lambda+\frac{q}{2})\pi i} (Q + i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}} \quad (46)$$

([1], página 284, fórmula 4), donde

$$(Q \pm io)^{\lambda} = \lim_{\varepsilon \to 0} (Q \pm i\varepsilon \mid x \mid^2)^{\lambda} \quad (47)$$

([1], página 275),

$$Q = Q(y) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2 \quad (48)$$

$p + q = n$ dimensión del espacio, ε es un número real tal que $\varepsilon > 0$, el símbolo $\wedge$ indica transformada de Fourier,

$$\{f\}^{\wedge} = \int e^{-\langle x,y \rangle} f(x) dx$$

y

$$a_{\lambda,n.i} = 2^{2\lambda+n} \pi^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\lambda + \frac{n}{2})(2i)^{-1}.$$

Usando las fórmulas

$$(P \pm i0)^{\lambda} = P_+^{\lambda} + e^{\pm\lambda\pi i} P_-^{\lambda} \quad (49)$$

([1], página 76),

$$P_+^{\lambda} = (-2isen\lambda\pi)^{-1} (e^{-\lambda\pi i} (P + i0)^{\lambda} - e^{\lambda\pi i} (P - i0)^{\lambda}) \quad (50)$$

$$P_-^{\lambda} = (2isen\lambda\pi)^{-1} ((P + i0)^{\lambda} - (P - i0)^{\lambda}) \quad (51)$$

y

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{sen\lambda\pi} \quad (52)$$

([8], página 344).
De(49) and (50) se tiene,

$$\left\{ \frac{P_-^{\lambda}}{\Gamma(\lambda + 1)} \right\}^{\wedge} = 2^{2\lambda+n} \pi^{\frac{n}{2}-1} (-1)^{\frac{q-1}{2}} \left[Q_+^{-\lambda-\frac{n}{2}} + \cos(\lambda + \frac{n}{2}) Q_-^{-\lambda-\frac{n}{2}} \right] \quad (53)$$

si q es impar y p es par (n impar),

$$\left\{ \frac{P_+^{\lambda}}{\Gamma(\lambda + 1)} \right\}^{\wedge} = -2^{2\lambda+n} \pi^{\frac{n}{2}-1} (-1)^{\frac{q-1}{2}} \left[Q_+^{-\lambda-\frac{n}{2}} + \cos(\lambda + \frac{n}{2}) Q_-^{-\lambda-\frac{n}{2}} \right] \quad (54)$$

si q es impar y p es par (n impar),

$$\left\{ \frac{P_-^{\lambda}}{\Gamma(\lambda + 1)} \right\}^{\wedge} = -2^{2\lambda+n} \pi^{\frac{n}{2}} (-1)^{\frac{q}{2}} \frac{Q_-^{-\lambda-\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\lambda - \frac{n}{2} + 1)} \quad (55)$$

si p y q son pares,

$$\left\{\frac{P_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right\}^\wedge = -2^{2\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{p}{2}}\frac{Q_-^{-\lambda-\frac{n}{2}}}{\Gamma(-\lambda-\frac{n}{2}+1)} \tag{56}$$

si p y q son pares,

$$\left\{\frac{P_-^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right\}^\wedge = 2^{2\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}-1}2^{-1}(-1)^{\frac{q-1}{2}}\left[(Q-i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}+(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right] \tag{57}$$

si p y q son impares, y

$$\left\{\frac{P_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right\}^\wedge = -2^{2\lambda+n}\pi^{\frac{n}{2}-1}2^{-1}(-1)^{\frac{q-1}{2}}\left[e^{-\lambda\pi i}(Q-i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}+e^{\lambda\pi i}(Q+i0)^{-\lambda-\frac{n}{2}}\right] \tag{58}$$

si p y q son impares.
De (56), (57), (58), (59) y usando las propiedades

$$\left\{\lim_{\lambda\to-k}\frac{P_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right\}^\wedge = \lim_{\lambda\to-k}\left\{\frac{P_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right\}^\wedge \tag{59}$$

([4], página 125, fórmula (98)) y la fórmula (20) se obtiene la siguiente fórmula

$$\{\delta^{(k)}(P_-)\}^\wedge = -\frac{(-1)^k 2^{n-2(k+1)}\pi^{\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(2-\frac{n}{2}+k)}Q_+^{k+1-\frac{n}{2}} \tag{60}$$

si q es impar y p es par (n impar),

$$\{\delta^{(k)}(P_+)\}^\wedge = \frac{(-1)^k 2^{n-2(k+1)}\pi^{\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(2-\frac{n}{2}+k)}Q_+^{k+1-\frac{n}{2}} \tag{61}$$

si p es par y q es impar (n impar),

$$\{\delta^{(k)}(P_-)\}^\wedge = -2^{n-2(k+1)}\pi^{\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{q}{2}}\delta^{(\frac{n}{2}-k-1)}(Q_-) \tag{62}$$

si p y q son pares y $k < \frac{n}{2}-1$, y

$$\{\delta^{(k)}(P_+)\}^\wedge = -2^{n-2(k+1)}\pi^{\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{p}{2}}\delta^{(\frac{n}{2}-k-1)}(Q_+) \tag{63}$$

si p y q son pares y $k < \frac{n}{2}-1$.
Cuando p y q son impares de (60) y (61) y usando la fórmula

$$(Q\pm i0)^{-k-1} = pfQ^{-k-1} \mp \frac{\pi i(-1)^k}{k!}\delta^{(k)}(Q) \tag{64}$$

([9], página 577) la cual es válida si $k \neq \frac{n}{2}+s-1$, $s = 1,2,\ldots$, donde pfQ^{-k-1} significa la parte finita de Q^λ en $\lambda = -k-1$ ([1],página 86) se tiene,

$$\{\delta^{(k)}(P_-)\}^\wedge = 2^{n-2(k+1)}2^{-1}\pi^{\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{q-1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2}-k-1)pfQ^{k+1-\frac{n}{2}} \tag{65}$$

si p y q son impares y $k < \frac{n}{2}-1$, y

$$\{\delta^{(k)}(P_+)\}^\wedge = (-1)^k 2^{n-2(k+1)}2^{-1}\pi^{\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{q-1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2}-k-1)pfQ^{k+1-\frac{n}{2}} \tag{66}$$

si p y q son impares y $k < \frac{n}{2}-1$.

Por otro parte, usando que $\delta^{(k)}(P_\pm)$ es una distribución de clase S' ([5], página 142) donde S' es el dual de S y S es el espacio de Schwartz ([7], página 233) y considerando el teorema clásico de Schwartz ([Schwartz], página 268, fórmula(IV,8,4) la siguiente fórmula es válida

$$\{\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+)\}^\wedge = \{\delta^{(k)}(P_+)\}^\wedge . \{\delta^{(l)}(P_+)\}^\wedge \tag{67}$$

y

$$\{\delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-)\}^\wedge = \{\delta^{(k)}(P_-)\}^\wedge . \{\delta^{(l)}(P_-)\}^\wedge \tag{68}$$

De (63), (64), (65), (66) y usando la propiedad

$$P_\pm^\lambda . P_\pm^\mu = P_\pm^{\lambda+\mu} \tag{69}$$

([6], página 39) donde λ y μ son números complejos tales que $\lambda, \mu, \lambda+\mu \neq -\frac{n}{2}-t$, $t = 0, 1, \ldots$ y $\lambda, \mu, \lambda+\mu \neq -1, -2, \ldots$ y considerando las fórmula (55), de (70) y (71) se tiene,

$$\begin{aligned}\{\delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-)\}^\wedge &= \Gamma(k+l-n+3)\Gamma(\tfrac{n}{2}-k-1)(\pi^{\frac{n}{2}-1})^3((-1)^{\frac{q-1}{2}})^3 \\ &\quad \Gamma(-\tfrac{n}{2}+k+l+2)\Gamma(\tfrac{n}{2}-l-1)\left\{P_+^{\frac{n}{2}-k-l-2}\right\}^\wedge\end{aligned} \tag{70}$$

si q es impar y p es par (n impar) y $k+l+2 > n-1$,

$$\begin{aligned}\{\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+)\}^\wedge &= -\Gamma(k+l-n+3)\Gamma(\tfrac{n}{2}-k-1)(\pi^{\frac{n}{2}-1})^3((-1)^{\frac{q-1}{2}})^3 \\ &\quad \Gamma(-\tfrac{n}{2}+k+l+2)\Gamma(\tfrac{n}{2}-l-1)\left\{P_+^{\frac{n}{2}-k-l-2}\right\}^\wedge\end{aligned} \tag{71}$$

si q es impar y p es par (n impar) y $k+l+2 > n-1$,

$$\begin{aligned}\{\delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-)\}^\wedge &= 2^{2n-2(k+1+l+1)}(\pi^{\frac{n}{2}})^2((-1)^{\frac{q}{2}})^2 . \\ &\quad \delta^{(\frac{n}{2}-k-1)}(Q_-) . \delta^{(\frac{n}{2}-l-1)}(Q_-)\end{aligned} \tag{72}$$

si p y q son pares y $k < \frac{n}{2}-1$ y $l < \frac{n}{2}-1$,

$$\{\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+)\}^{\wedge} = 2^{2n-2(k+1+l+1)}(\pi^{\frac{n}{2}})^2((-1)^{\frac{p}{2}})^2. \quad (73)$$
$$\delta^{(\frac{n}{2}-k-1)}(Q_+).\delta^{(\frac{n}{2}-l-1)}(Q_+)$$

si p y q son pares y $k < \frac{n}{2} - 1$ y $l < \frac{n}{2} - 1$.
De (68) y (69) se tiene,

$$\{\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+)\}^{\wedge} = (-1)^{k+l+q-1}2^{2n-2(k+1+l+1)-2}(\pi^{\frac{n}{2}})^2 \quad (74)$$
$$\Gamma(\tfrac{n}{2} - k - 1)\Gamma(\tfrac{n}{2} - l - 1)pfQ^{k+l-n+2}$$

si p y q son impares y $k < \frac{n}{2} - 1$ y $l < \frac{n}{2} - 1$, y

$$\{\delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-)\}^{\wedge} = 2^{2n-2(k+1+l+1)-2}(\pi^{\frac{n}{2}})^2(-1)^{q-1} \quad (75)$$
$$\Gamma(\tfrac{n}{2} - k - 1)\Gamma(\tfrac{n}{2} - l - 1)pfQ^{k+l-n+2}$$

si p y q son impares y $k < \frac{n}{2} - 1$ y $l < \frac{n}{2} - 1$.
Por otra parte, usando la fórmula

$$\delta^{(k)}(P).\delta^{(l)}(P) = 0 \quad (76)$$

cuando n es par y $k + l + 2 \neq \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1, \dots$ ([6], página 18, fórmula 42), se tiene

$$\delta^{(\frac{n}{2}-k-2)}(P_+).\delta^{(\frac{n}{2}-l-2)}(P_+) = 0 \quad (77)$$

y

$$\delta^{(\frac{n}{2}-k-2)}(P_-).\delta^{(\frac{n}{2}-l-2)}(P_-) = 0 \quad (78)$$

si n es par y $k + l \neq \frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} - 2 \dots$
Ahora usando la fórmula (67) se tiene

$$pfQ^{-(n-k-l-2)} = 2^{-1}[(Q + i0)^{-(n-k-l-2)} + (Q - i0)^{-(n-k-l-2)}]. \quad (79)$$

Por otro parte, usando la fórmula (48), se tiene,

$$\left\{P_-^{\frac{n}{2}-k-l-2}\right\}^{\wedge} = -2^{n+2(\frac{n}{2}-k-l-2)-1}\pi^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\tfrac{n}{2} - k - l - 2)\Gamma(n - k - l - 2)$$
$$(-1)^{\frac{q-1}{2}}[(Q + i0)^{-(n-k-l-2)} + (Q - i0)^{-(n-k-l-2)}] \quad (80)$$

Si p y q son impares.
De (77) y (78) y usando las fórmulas (82) y (83) se tiene

$$\{\delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-)\}^{\wedge} \quad = \quad \pi^{\frac{n}{2}+1} 2^{-2} \Gamma(\tfrac{n}{2} - k - 1)\Gamma(\tfrac{n}{2} - l - 1).$$

$$\frac{1}{(-1)^{\frac{q-1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}-k-l-1)\Gamma(n-k-l-2)} \left\{P_-^{\frac{n}{2}-k-l-2}\right\}^{\wedge} \tag{81}$$

si p y q son impares y

$$\{\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+)\}^{\wedge} \quad = \quad (-1)^{k+l} \pi^{\frac{n}{2}+1} 2^{-2} \Gamma(\tfrac{n}{2} - k - 1)\Gamma(\tfrac{n}{2} - l - 1.$$

$$\frac{1}{(-1)^{\frac{q-1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}-k-l-1)\Gamma(n-k-l-2)} \left\{P_-^{\frac{n}{2}-k-l-2}\right\}^{\wedge} \tag{82}$$

si p y q son impares.
De (73) y (74) y en virtud del teorema de la identidadde la transformada de Fourier, se llega a la formalización del siguiente teorema,

Teorema 1 *Sean* k *y* l *enteros positivos y* $\delta^{(k)}(P_\pm)$ *las distribuciones definidas por (19) y (20) entonces si* $k + l + 2 > n - 1$ *las siguientes fórmulas son válidas,*

$$\delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-) = g_{k,l} P_+^{\frac{n}{2}-k-l-2} \tag{83}$$

si q *es impar y* p *es par (* n *impar) y*

$$\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+) = -g_{k,l} P_+^{\frac{n}{2}-k-l-2} \tag{84}$$

si q *es impar y* p *es par (* n *impar). Donde* n *es dimensión impar del espacio y*

$$g_{k,l} \quad = \quad \Gamma(k + l - n + 3)\Gamma(\tfrac{n}{2} - k - 1)$$

$$2^n (\pi^{\frac{n}{2}-1})^3 ((-1)^{\frac{q-1}{2}})^3 \tag{85}$$

$$\Gamma(-\tfrac{n}{2} + k + l + 2)\Gamma(\tfrac{n}{2} - l - 1)$$

observe que si p es par y q es impar, la distribución P_+^λ es regular en $\lambda = -\frac{n}{2} - s, s = 0, 1, 2, \ldots$ ([1], página 260)
De (75), (76), usando (80), (81) y en virtud del teorema de identidad de la transformada de Fourier, se llega al siguiente teorema,

Teorema 2 *Sean* k *y* l *enteros positivos y* $\delta^{(k)}(P_\pm)$ *distribuciones definidas por (21) y (22) entonces si* $k < \frac{n}{2} - 1$ *y* $l < \frac{n}{2} - 1$ *la siguiente fórmula es válida*

$$\delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-) = 0 \tag{86}$$

y

$$\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+) = 0 \tag{87}$$

Si p *y* q *son pares y* $n = p + q$ *es la dimensión del espacio.*
Finalmente, de (84) y (85) y usando el teorema de identidad de la transformada de Fourier, se tiene el siguiente teorema,

Teorema 3 *Sean* k *y* l *enteros positivos y* $\delta^{(k)}(P_\pm)$ *distribuciones definidas por (21) y (22) entonces si* $k < \frac{n}{2} - 1$ *y* $l < \frac{n}{2} - 1$ *las siguientes fórmulas son válidas*

$$\delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-) = h_{k,l,n} P_-^{\frac{n}{2}-k-l-2} \tag{88}$$

y

$$\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+) = (-1)^{k+l} h_{k,l,n} P_-^{\frac{n}{2}-k-l-2} \tag{89}$$

Si p *y* q *son impares y* $n = p + q$ *es la dimensión del espacio y*

$$h_{k,l,n} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}+1} 2^{-2} \Gamma(\frac{n}{2} - k - 1)\Gamma(\frac{n}{2} - l - 1)}{\Gamma(\frac{n}{2} - k - l - 1)\Gamma(n - k - l - 2)(-1)^{\frac{q-1}{2}}} \tag{90}$$

3. Los productos de convolución $\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+), \delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-)$, $\delta_1^{(k)}(P) * \delta_1^{(l)}(P)$ y $\delta_2^{(k)}(P) * \delta_2^{(l)}(P)$.

Para obtener estos productos vamos a necesitar las siguientes fórmulas:

$$\delta^{(k)}(P_+) = (-1) B_{k,p,q} L^{k-\frac{n}{2}+1} \text{ si } k \geq \frac{n}{2} - 1 \tag{91}$$

([2], página 10, fórmula 45 y 48),

$$\delta^{(k)}(P_-) = 2 B_{k,p,q} L^{k-\frac{n}{2}+1} \text{ si } k \geq \frac{n}{2} - 1 \tag{92}$$

([2], página 10, fórmula 46 y 49),

$$\delta_1^{(k)}(P) = 2 D_{k,p,q} L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} \text{ para } p \text{ y } q \text{ par y } k \geq \frac{n}{2} - 1 \tag{93}$$

([2], página 12, fórmula 54),

$$\delta_1^{(k)}(P) = E_{k,p,q} L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} \text{para } p \text{ y } q \text{ impar y } k \geq \frac{n}{2} - 1 \tag{94}$$

([2], página 11, fórmula 53),

$$\delta_2^{(k)}(P) = D_{k,p,q} L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} \text{ para } p \text{ y } q \text{ par y } k \geq \frac{n}{2} - 1 \tag{95}$$

([2], página 12, fórmula 55) y

$$\delta_2^{(k)}(P) = F_{k,p,q} L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} \text{ para } p \text{ y } q \text{ impar y } k \geq \frac{n}{2} - 1 \tag{96}$$

donde

$$B_{k,p,q} = \frac{(-1)^k(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^{k-\frac{n}{2}+1}(k-\frac{n}{2}+1)!} \text{ para } p \text{ y } q \text{ pares} \tag{97}$$

$$B_{k,p,q} = \frac{(-1)^k(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^{k-\frac{n}{2}+1}(k-\frac{n}{2}+1)!}\left[\psi(\tfrac{p}{2})-\psi(\tfrac{n}{2})\right]L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} \tag{98}$$

para p y q impares

$$D_{k,p,q} = -\frac{(-1)^{\frac{q}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{4^{k-\frac{n}{2}+1}(k-\frac{n}{2}+1)!} \tag{99}$$

para p y q pares,

$$F_{k,p,q} = -\frac{(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^{k-\frac{n}{2}+1}(k-\frac{n}{2}+1)!}\left[\psi(\frac{p}{2})-\psi(\frac{n}{2})\right].L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} \tag{100}$$

y

$$E_{k,p,q} = \frac{(-1)^k(-1)^{\frac{q+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{4^{k-\frac{n}{2}+1}(k-\frac{n}{2}+1)!}\left\{2\left[\psi(\tfrac{n}{2})-\psi(\tfrac{p}{2})\right]\right\} \tag{101}$$

para p y q impares.
Ahora vamos a considerar dos teoremas para expresar los resultados, lo cual se hará a través de dos casos, cuando p y q son pares y cuando p y q son impares.

Teorema 4 *Sean* k, l *enteros no negativos tales que* $k \geq \frac{n}{2}-1$ *y* $l \geq \frac{n}{2}-1$ *entonces si* p *y* q *son pares las siguientes fórmulas son válidas,*

$$\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+) = A_{k,l,n,p}\delta^{(k+l-\frac{n}{2}+1)}(P_+), \tag{102}$$

$$\delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-) = (-2)A_{k,l,n,p}\delta^{(k+l-\frac{n}{2}+1)}(P_-), \tag{103}$$

$$\delta_1^{(k)}(P) * \delta_1^{(l)}(P) = 2A_{k,l,n,q}\delta_1^{(k+l-\frac{n}{2}+1)}(P) \tag{104}$$

y

$$\delta_2^{(k)}(P) * \delta_2^{(l)}(P) = -A_{k,l,n,q}\delta_2^{(k+l-\frac{n}{2}+1)}(P) \tag{105}$$

donde

$$A_{k,l,n,j} = \frac{(-1)^{\frac{j}{2}}(k+l-n+2)!}{(k-\frac{n}{2}+1)!(l-\frac{n}{2}+1)!} \textit{para } j = p \text{ ó } q \tag{106}$$

Prueba En la demostración del teorem 4, vamos a necesitar el producto de convolución del operador hiperbólico iterado $(j - \frac{n}{2} + 1)$ veces $L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} * L^{l-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\}$ resultado que aparece en ([2], página 346). Por lo tanto, de ([2], página 346, fórmula 53), la siguiente fórmula es válida

$$L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} * L^{l-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} = L^{k+l-\frac{n}{2}+1-\frac{n}{2}+1}\delta(x) \tag{107}$$

bajo las condiciones $k \geq \frac{n}{2} - 1, l \geq \frac{n}{2} - 1$ para n par.

Por otro lado sabemos que $L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\}$ es una distribución de la clase O_c', donde O_c' es el espacio de distribución que se disminuye rápidamente ([7], página 244),Por lo tanto tomando en cuentas las fórmulas (91), (92), (93), (94), (95) y (96) los productos de convolución $\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+), \delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-), \delta_1^{(k)}(P) * \delta_1^{(l)}(P)$ y $\delta_2^{(k)}(P) * \delta_2^{(l)}(P)$ existe bajo condiciones $k \geq \frac{n}{2} - 1, l \geq \frac{n}{2} - 1$ por n par.

Por tanto, se tiene

$$\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+) = B_{k,p,q}B_{l,p,q}\left(L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} * L^{l-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\}\right) \tag{108}$$

$$\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+) = 4B_{k,p,q}B_{l,p,q}\left(L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} * L^{l-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\}\right) \tag{109}$$

donde $B_{k,p,q}$ está definida por la fórmula (100) si p y q son pares y (101) si p y q son impares,

$$\delta_1^{(k)}(P) * \delta_1^{(l)}(P) = 4D_{k,p,q}D_{l,p,q}\left(L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} * L^{l-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\}\right) \tag{110}$$

donde $D_{k,p,q}$ está definido por la fórmula (102),

$$\delta_1^{(k)}(P) * \delta_1^{(l)}(P) = E_{k,p,q}E_{l,p,q}\left(L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} * L^{l-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\}\right) \tag{111}$$

donde $E_{k,p,q}$ está definido por la fórmula (104),

$$\delta_2^{(k)}(P) * \delta_2^{(l)}(P) = D_{k,p,q}D_{l,p,q}\left(L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} * L^{l-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\}\right) \tag{112}$$

donde $D_{k,p,q}$ está definido por la fórmula (102) y

$$\delta_2^{(k)}(P) * \delta_2^{(l)}(P) = F_{k,p,q}F_{l,p,q}\left(L^{k-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\} * L^{l-\frac{n}{2}+1}\{\delta(x)\}\right) \tag{113}$$

donde $E_{k,p,q}$ está definido por la fórmula (form.102) y
De (111), usando (110) y la fórmula (100) se obtiene la fórmula (105).
En forma similar de (112), usando (110) y la fórmula (100) se obtiene la fórmula (106).
De (113), usando (110) y la fórmula (102) se obtiene la fórmula ((107).
Finalmente de (115),usando(110)y la fórmula (form.102) se obtiene la fórmula (108).

Teorema 5 *Sean* k, l *enteros no negativos tales que* $k \geq \frac{n}{2} - 1$ *y* $l \geq \frac{n}{2} - 1$ *entonces si* p *y* q *son impares las siguientes fórmulas son válidas,*

$$\delta^{(k)}(P_+) * \delta^{(l)}(P_+) = C_{k,l,n,p}\delta^{(k+l-\frac{n}{2}+1)}(P_+) \tag{114}$$

$$\delta^{(k)}(P_-) * \delta^{(l)}(P_-) = 2C_{k,l,n,p}\delta^{(k+l-\frac{n}{2}+1)}(P_-) \tag{115}$$

$$\delta_1^{(k)}(P) * \delta_1^{(l)}(P) = H_{k,l,n,p}\delta_1^{(k+l-\frac{n}{2}+1)}(P) \tag{116}$$

y

$$\delta_2^{(k)}(P) * \delta_2^{(l)}(P) = C_{k,l,n,q}\delta_2^{(k+l-\frac{n}{2}+1)}(P) \tag{117}$$

donde

$$C_{k,l,n,j} = \frac{(-1)(-1)^{\frac{j+1}{2}}(k+l-n+2)!}{(k-\frac{n}{2}+1)!(l-\frac{n}{2}+1)!}.\left[\psi(\tfrac{j}{2}) - \psi(\tfrac{n}{2})\right] para\ j = p\ ó\ q \tag{118}$$

y

$$H_{k,l,n,p} = \frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}\pi^{\frac{n}{2}-1}}{(k-\frac{n}{2}+1)!(l-\frac{n}{2}+1)!}.\left\{\left[\psi(\tfrac{n}{2}) - \psi(\tfrac{p}{2})\right]\right\}. \tag{119}$$

Prueba La demostración de este teorema5 se realiza de la misma forma que el teorema4.
De (111), usando (110) y la fórmula (101) se obtiene la fórmula (117).
En forma similar de (112), usando (110) y la fórmula (101) se obtiene la fórmula (118).
De (113), usando (110) y la fórmula (104) se obtiene la fórmula (form.119).
Finalmente de (116), usando (110) y la fórmula (103) se obtiene la fórmula (120).

REFERENCIAS

[1]. M. Gelfand and G.E. Shilov., *Generalized Functions, Vol.I,* Academic Press, New York,1964.

[2]. M. A. Aguirre T., *Proportonality of k-th derivative of Dirac delta in hypercone, Mathematica Balkanica,* New Series, vol.14, 2000, Fasc.3-4, pp.253-264.

[3]. M. A. Aguirre T., *The distribution* $\delta^{(k)}(P \pm i0 - m^2)$ *, Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol.88, 339-348, 1997.

[4]. M. A. Aguirre T., *The expansion and Fourier´s Transform of* $\delta^{(k-1)}(m^2 + P)$ *, Integral Transform and Special Functions*, Vol.3, Nro.2, pp.113-134,1995.

[5]. M. A. Aguirre T., *The product of convolution* $P_\pm^\lambda * P_\pm^\mu$ *and the multiplicative product* $P_\pm^\lambda.\delta^{(k)}(P_\pm)$, Mathl.Comput.Modeling Vol.23, Nro.10, pp.135-144,1996.

[6]. M. A. Aguirre T., *The distributional product of Dirac's delta in a hypercone, Journal of Computational and Applied Mathematics 115*,pp13-21,(2000).

[7]. L. S. Schwartz., *Theorie des Distributions*, Hermann, Paris,1966.

A. Erdelyi (Editor)., *Higher Trascendental Functions*, Vol.I and II, McGraw-Hill, New York, 1953.

[8]. D.W.Bresters, *On distributions connected with quadratic forms*, SIAM, J.Appl. Math.,16, 1968, pp. 563-581.

Manuel A. Aguirre, Profesor y Decano
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro de la Prov. de Buenos Aires
Paraje Arroyo Seco, 7000-Tandil
Provincia de Buenos Aires, Argentina
Tel.: +54 2293 439657
E-mail: maguirre@exa.unicen.edu.ar