UNA COTA INFERIOR PARA EL RANGO DE MORDELL-WEIL DE LA FIBRA GENÉRICA DE UNA SUPERFICIE K3 ELÍPTICA DADA COMO EL CUBRIENTE DOBLE RAMIFICADO DE UNA SUPERFICIE ELÍPTICA RACIONAL PARTICULAR

Oswaldo Josué Sevilla Requeno[a]

[a]Escuela de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de Honduras, osevilla@unah.edu.hn, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5239-4772

DOI: https://doi.org/10.5377/pc.v1i19.18697

Recepción: 14/08/2023
Aceptación: 3/11/2023

Resumen

Las superficies K3 son un tema de estudio muy relevante, encontrándose en la intersección de estudios en geometría compleja, geometría algebraica y geometría aritmética. Las superficies K3 aparecen también en algunos estudios de la teoría de cuerdas en física. Son variedades de Calabi-Yau de dimensión 2, una generalización natural de las curvas elípticas. Algunas de sus propiedades algebro-geométricas son notablemente difíciles de calcular, particularmente sus números de Picard y el comportamiento de los números de Picard en familias de superficies K3. Las superficies K3 tienen una relación interesante con las curvas elípticas. En particular, toda superficie K3 con número de Picard de al menos 5 posee una fibración elíptica, que se conoce como superfice K3 elíptica. La fórmula de Shioda-Tate muestra una relación admirable entre la aritmética de las curvas elípticas y la geometría de las superficies K3 elípticas, y es una herramienta valiosa para poder estudiar el número de Picard de estas superficies. En este trabajo se presenta un caso especial de superficies K3, y se calcula, para un caso específico, una cota inferior de su número de Picard usando una fibración elíptica.

Palabras clave: geometría algebraica, superficies K3, superficies elípticas

A LOWER BOUND FOR THE MORDELL-WEIL RANK OF THE GENERIC FIBER OF AN ELLIPRIC K3 SURFACE GIVEN BY THE RAMIFIED DOUBLE COVER OF A PARTICULAR RATIONAL ELLIPTIC SURFACE

Oswaldo Josué Sevilla Requeno[a]

[a]Escuela de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de Honduras, osevilla@unah.edu.hn, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5239-4772

DOI: https://doi.org/10.5377/pc.v1i19.18697

Recepción: 14/08/2023
Aceptación: 3/11/2023

Abstract

K3 surfaces are a very relevant field of research, being at the intersection between complex geometry, algebraic geometry, and arithmetic geometry. They also appear in some research works in string theory in physics. K3 surfaces are Calabi-Yau varieties of dimension 2 and a natural analog of elliptic curves in dimension 2. Some of their algebro-geometrical properties are notably difficult to compute, in particular their Picard numbers and the behavior of the Picard numbers of families of K3 surfaces. K3 surfaces have an interesting relationship with elliptic curves. In particular, every K3 surface with Picard number at least 5 has an elliptic fibration, known as an elliptic K3 surface. The Shioda-Tate formula shows an outstanding relation between the arithmetic of elliptic curves and the geometry of elliptic K3 surfaces, and is an important tool to study the Picard groups of these surfaces. In this work, we study a special case of K3 surfaces, computing a lower bound for its Picard number using an elliptic fibration.

Keywords: algebraic geometry, K3 surfaces, elliptic surfaces

Introducción

Las superficies K3 son un tema de estudio muy relevante, encontrándose en la intersección de estudios en geometría compleja, geometría algebraica y geometría aritmética. Las superficies K3 aparecen también en algunos estudios de teoría de cuerdas en física. Son variedades de Calabi-Yau de dimensión 2 una generalización natural de las curvas elípticas. Algunas de sus propiedades algebro-geométricas son notablemente difíciles de calcular, particularmente sus números de Picard y el comportamiento de los números de Picard en familias de superficies K3.

Las superficies K3 tienen una relación interesante con las curvas elípticas. En particular, toda superficie K3 con número de Picard al menos 5 posee una fibración elíptica, que se conoce como *superficie K3 elíptica*. La fórmula de Shioda-Tate muestra una relación admirable entre la aritmética de las curvas elípticas y la geometría de las superficies K3 elípticas, y es una herramienta valiosa para poder estudiar el número de Picard de estas superficies.

En este trabajo se presenta un caso especial de superficies K3, y se calcula para un caso específico una cota inferior de su número de Picard usando una fibración elíptica.

Curvas elípticas

Para detalles sobre variedades algebraicas y términos que por el enfoque del artículo no se han discutido, véase Hartshorne (1977). Como referencia sobre curvas elípticas, véase Silverman (1986).

El género g de una curva algebraica compleja lisa coincide con su género topológico: es su número de asas, *i.e.*, la curva es homeomorfa a una suma conexa de g toros topológicos ($S^1 \times S^1$).

Definición 1: Una curva elíptica sobre un campo K es un par (E,O), donde E es una curva algebraica completa y lisa de género 1 definida sobre K y O es un punto K — *racional* distinguido en E.

Note que una variedad sobre $\mathbb{C}$ es completa si y solo si es compacta en la topología usual de $\mathbb{C}$ (llamada topología trascendente en este contexto).

En este trabajo, a menos que se indique lo contrario, se trabajará con curvas elípticas sobre $\mathbb{C}$.

Observe que frecuentemente se llama curva elíptica a una curva lisa de dimensión 1, sin tomar en cuenta un punto distinguido.

Para una curva elíptica E definida sobre $\mathbb{Q}$, el conjunto de los puntos racionales de la curva E, denotado por $E(\mathbb{Q})$, tiene estructura de grupo. Este grupo es llamado el grupo de Mordell-Weil de la curva E. El punto distinguido es el elemento neutro del grupo.

El teorema de Mordell-Weil dice que el grupo de Mordell-Weil de una curva elíptica es un grupo abeliano finitamente generado, véase Silverman (1986). El rango de la parte libre de este grupo se llama el rango de Mordell-Weil de la curva elíptica.

En general, calcular el rango de Mordell-Weil de una curva elíptica es una tarea que puede volverse complicada. Se puede simplificar este cálculo en algunos casos específicos. Para ejemplos de estos cálculos puede verse Silverman (1986).

Observación 2: Note que para superficies elípticas sobre K se define el grupo de Mordell-Weil de una forma que coincide con el grupo de puntos $K(\mathbb{C})$ — *racional* de la curva sobre el punto genérico de la curva base $\mathbb{C}$. En ese caso no estudiamos los puntos sobre $\mathbb{Q}$.

Superficies algebraicas

Aquí se precisan algunos términos sobre superficies algebraicas a ser usados en el artículo. Para detalles sobre superficies algebraicas complejas, véase Barth (2004).

Una superficie algebraica sobre un campo K es una variedad algebraica de dimensión 2 definida sobre K. Se puede ver desde el punto de vista clásico y de manera más intuitiva como un conjunto que posee una cubierta por abiertos dados por variedades algebraicas afines, tal que el pegado de estas cartas funciona bien. En el resto de este trabajo consideramos los campos $\mathbb{C}$ y $\mathbb{Q}$. Se trabajará sobre $\mathbb{C}$, a menos que se especifique el campo.

Ejemplos sencillos de superficies sobre $\mathbb{Q}$ son:

- El espacio afín de dimensión 2 sobre $\mathbb{Q}$ (puede verse como $\mathbb{Q}^2$).
- El conjunto de puntos racionales que son ceros de un polinomio en tres variables con coeficientes racionales.

- El plano proyectivo racional $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$.

La relación de birracionalidad es muy importante en geometría algebraica. Puede decirse de manera breve que dos variedades (X,Y) son birracionales si existen mapeos birracionales X→Y y Y →X , tales que al restringirse a abiertos de Zariski dados en ambas variedades definen un isomorfismo. Para detalles sobre relación birracional de superficies, véase Hartshorne (1977).

Definición 3. Una superficie se llama racional si es birracional a $\mathbb{P}^2$ (el plano proyectivo de dimensión 2).

Definición 4. La irregularidad $q(S)$ de una superficie compleja compacta S es la dimensión de $H^1(S,\mathbb{C})$.

Si la superficie es simplemente conexa, entonces $q(S)$=0.

Definición 5: El género geométrico $\mathrm{p_g(S)}$ de una superficie compleja compacta S es la dimensión de $H^2(S,\mathcal{O}_S)$.

Este número coincide con la dimensión del espacio de secciones globales de 2-formas holomorfas.

Definición 6: Cuando este espacio de secciones globales está generado por una 2-forma holomorfa global, se dice que su clase canónica es trivial.

Cuando la clase canónica de S es trivial, $p_g(S)=1$.

Observación 7: La irregularidad y el género geométrico de una superficie S se pueden definir a partir de sus números de Hodge: $q(S)=h^{0,1}(S)$ y $p_g(S)=h^{0,2}(S)$.

Se escribirá simplemente q y p_g cuando no haya ambigüedad al respecto de la superficie de la que se esté hablando. Los *blowups* de puntos de una superficie son la base de la relación birracional entre superficies algebraicas. Encontrar invariantes birracionales es sumamente importante en teoría de superficies.

Denotemos por $Bl_p(S)$ el *blowup* de una superficie S en un punto p. La cohomología de la superficie S tiene un comportamiento interesante bajo *blowups:*

Lema 8: (Arapura, 2012, lema 11.1.5) Para una superficie algebraica S, $H^1\left(Bl_p(S)\right)\cong H^1(S)$ y $(H^2\left(Bl_p(S)\right)\cong H^2(S)\oplus\mathbb{Z})$.

La irregularidad y el género geométrico son invariantes bajo ciertas relaciones. En particular bajo *blowups* y *blowdowns:*

Proposición 9: q y p_g son invariantes bajo *blowups* y *blowdowns* de un punto en una superficie.

Por el lema 8, cada *blowup* (*blowdown*) deja invariante $q(S)=h^{0,1}(S)$, y aumenta (reduce) el segundo número de Betti $b^2(S)$ en uno.

Por la descomposición de Hodge de S se tiene que:

$$b^2(S)=h^{1,1}(S)+2h^{0,2}(S)=h^{1,1}(S)+2p_a(S).$$

Luego, la única posibilidad es que $h^{1,1}(S)$ aumenta en uno con cada *blowup,* y cada blowdown lo reduce en uno. En consecuencia, $\mathrm{p_g(S)}$ se mantiene constante. *q.e.d.* La irregularidad y el género geométrico son invariantes bajo un tipo más general de relaciones entre superficies: invariantes birracionales.

Proposición 10: q y p_g son invariantes birracionales de superficies.

Esto sucede como consecuencia del teorema de contracción de Castelnuovo para superficies algebraicas birracionales (Kollár y Mori, 1998; Arapura, 2012; Hartshorne, 1977, y sus referencias). El teorema de Castelnuovo nos dice que dos superficies birracionales pueden transformarse una en otra mediante un número finito de *blowups* y *blowdowns.* En consecuencia, tanto la irregularidad como el género geométrico de una superficie son invariantes birracionales. *q.e.d.*

Definición 11: El grupo de divisores de Mordell-Weil de una variedad algebraica es el grupo abeliano libre generado por las subvariedades de codimensión 1. Como recordatorio, en una superficie las subvariedades de codimensión 1 son curvas.

Definición 12: Un divisor principal es un divisor asociado a una función meromorfa f en la superficie, dado por $(f)=(f)_0-(f)_\infty$, donde $(f)_0$ es la subvariedad de ceros de (f) y $(f)_\infty$ es la subvariedad de polos de f.

Definición 13: Dos divisores son linealmente equivalentes si su diferencia es un divisor principal.

Definición 14: Un divisor de Cartier de una variedad algebraica es un divisor localmente principal.

Para referencia sobre divisores localmente principales, el lector puede recurrir a Shafarevich, (1994) y Hartshorne (1977).

Definición 15: El grupo de Picard $Pic(X)$ de una variedad algebraica X está definido como el grupo de haces lineales invertibles.

Alternativamente, el grupo de Picard se puede definir como el grupo de divisores de Cartier módulo equivalencia lineal.

Definición 16: El grupo de Néron-Severi $NS(X)$ de una variedad X es el grupo de Picard de X módulo equivalencia algebraica.

Definición 17: El número de Picard de una variedad es el rango de su grupo de Néron-Severi.

Superficies elípticas

Las superficies elípticas son de gran interés y poseen muchas aplicaciones en geometría. Un ejemplo interesante es el artículo de Schoen, donde se construyen variedades Calabi-Yau a partir de superficies elípticas, y se calculan sus números de Hodge usando propiedades de esas fibraciones.

Definición 18: Una superficie elíptica es una superficie proyectiva lisa $\mathcal{S}$ que posee una fibración sobre una curva base C, cuyas fibras son todas, excepto un número finito, curvas lisas de género 1.

Sea $\psi: \mathcal{S} \to \mathbb{P}^1$ una superficie elíptica. Denote por $\mu_{\text{crit}}(\mathcal{S})$ (o simplemente μ_{crit} al conjunto de valores críticos de ψ, *i.e.*, el conjunto de valores en P^1 a los que les corresponde una fibra singular. Este conjunto también se conoce como el conjunto discriminante de ψ.

De particular interés son las superficies elípticas minimales:

Definición 19: Se dice que una fibración elíptica es mínima si ninguna de sus fibras posee un componente que sea curva -1.

Como recordatorio, las curvas -1 son las curvas cuya autointersección es -1, según la forma de intersección de la superficie ambiente.

Definimos ahora los divisores verticales, los cuales tienen un papel importante en el estudio de una superficie elíptica:

Definición 20: Un divisor D sobre una superficie elíptica $\mathcal{S}$ es vertical si para toda fibra F se cumple:

$$\mathrm{D} \cdot \mathrm{F} = 0.$$

Para superficies elípticas minimales, tenemos el siguiente resultado sobre su clase canónica:

Proposición 21: Dada una superficie elíptica minimal $\mathcal{S}$, su clase canónica tiene autointersección nula, *i.e.*

$$\mathrm{K}_{\mathrm{S}}^2 = 0.$$

Demostración: Para una fibra general F, se tiene, al usar la fórmula de adjunción, que

$$K_{\mathcal{S}} \cdot F = 0.$$

Usando el lema de Zariski (Barth, 2004), se obtiene que $K_{\mathcal{S}}$ es la suma de múltiplos racionales de fibras. Por tanto, $K_{\mathcal{S}}^2 = 0$. *q.e.d.*

En lo que resta del artículo solo se trabajará con superficies elípticas minimales.

Si la superficie elíptica admite una sección, se llamará *superficie elíptica con sección*.

Definición 22: Para una superficie elíptica $\pi: \mathcal{S} \to C$, una sección se define como un morfismo:

$$\sigma: C \to \mathcal{S} \text{ tal que } \pi \circ \sigma = id_C.$$

En lo que sigue de esta sección, S denota una superficie algebraica arbitraria, $\mathcal{S}$ una superficie elíptica y $\mathfrak{S}$ una superficie elíptica racional (a definirse adelante). Además, a menos que se indique lo contrario, se consideran solamente superficies elípticas con sección.

Sea $\pi: \mathcal{S} \to C$ una fibración elíptica con una sección dada σ. Este σ elige en cada fibra un punto, definiendo así una fibración por curvas elípticas.

Llame $MW(\mathcal{S})$ al conjunto de todas las secciones de la superficie elíptica $\mathcal{S}$ (es decir, secciones de π). La adición fibra por fibra induce una ley de grupo en $MW(\mathcal{S})$ con σ como elemento neutro.

Definición 23: El grupo $MW(\mathcal{S})$ de secciones de una superficie elíptica con sección $\pi: \mathcal{S} \to C$ se llama el grupo de Mordell–Weil *de* $\mathcal{S}$ (o de π).

Observación 24: Para superficies elípticas compactas, el grupo de Mordell–Weil es finitamente generado.

Uno de los objetivos de este trabajo es calcular el grupo de Mordell–Weil de superficies elípticas racionales semiestables.

Definición 25: Una fibración elíptica es semiestable si todas las fibras singulares son de tipo Kodaira I_n.

Definición 26: Una superficie elíptica racional (SER) $\mathfrak{S}$ es una superficie elíptica birracional a $\mathbb{P}^2$.

Definición 27: Para una superficie elíptica racional $\mathfrak{S}$, se tiene $q(\mathfrak{S}) = 0$ y $p_g(\mathfrak{S}) = 0$.

Demostración: Observe que al ser la irregularidad y el género geométrico invariantes birracionales, y al ser $\mathfrak{S}$ racional, se tiene:

$$q(\mathfrak{S}) = q(\mathbb{P}^2) = 0$$

y

$$p_g(\mathfrak{S}) = p_g(\mathbb{P}^2) = 0$$

q.e.d.

Tenemos el siguiente resultado para SER semiestables:

Proposición 28: El número total de componentes de las fibras singulares en una superficie elíptica racional semiestable es 12.

Demostración: Usando la fórmula de Noether:

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{K_{\mathfrak{S}}^2 + e}{12}.$$

Como $K_{\mathfrak{S}^2} = 0$ para una superficie elíptica minimal, tenemos que

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{e}{12}.$$

Note que, para superficies elípticas racionales,

$$\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q(\mathfrak{S}) + p_g(\mathfrak{S}) = 1.$$

Como consecuencia,

$$e(\mathfrak{S}) = 12. \quad (1)$$

Para $\mathcal{S} \to C$, una fibración elíptica semiestable cualquiera sobre una curva C, llame E a una fibra general y E_c a la fibra sobre C. Tomando en cuenta que $e(E) = 0$, podemos calcular su característica topológica de Euler:

$$e(\mathcal{S}) = e(E)e(C\backslash\mu_{crit}) + \sum_{c\in\mu_{crit}} \left(e(E_c) - e(E)\right) = \sum_{c\in\mu_{crit}} e(E_c).$$

Para una superficie elíptica racional semiestable, esto se simplifica a:

$$e(\mathfrak{S}) = \sum\nolimits_{c\in\mu_{(crit)}} e(E_c) = \sum\nolimits_{c\in\mu_{(crit)}} \#\,\text{componentes}(E_c).$$

Esto sucede porque el número de componentes de una fibra de tipo Kodaira I_n y su número de nodos n coinciden. Así, usando (1) obtenemos

$$12 = \sum\nolimits_{c\in\mu_{crit}} \#\text{componentes}(E_c). \quad (2)$$

Por tanto, el número total de componentes de las fibras singulares en una superficie elíptica racional semiestable es 12. *q.e.d.*

Observación 29: Este resultado es importante al simplificar la fórmula de Shioda-Tate para calcular el número de Picard de una superficie elíptica racional.

Observe además que este resultado es importante en otras situaciones, *e.g.*, al estudiar las simplificaciones para las fórmulas.

Es interesante notar que, si la superficie no es minimal, el total de componentes de las fibras singulares puede ser mayor que 12.

Ahora calcularemos el número de Picard de una superficie elíptica racional.

Proposición 30: Una superficie elíptica racional tiene número de Picard 10.

Demostración: Sea $\mathfrak{S}$ una superficie elíptica racional. Para una superficie lisa cualquiera S, sean $q(S)$ su irregularidad y $p_g(S)$ su género geométrico.

Denote por $b^n(S)$ el n-ésimo número de Betti de S, y sea ρ_S el número de Picard de esta superficie. Llame a $\lambda(S) = b^2(S) - \rho_S$ el *número de Lefschetz* de S.

λ, q y p_g son invariantes birracionales, como consecuencia del teorema de contracción de Castelnuovo para superficies algebraicas birracionales. En particular, observe que b^2 aumenta en uno con cada *blowup* y ρ también aumenta en uno con cada *blowup*, por tanto, λ es invariante bajo *blowups*.

Dado que $\mathfrak{S}$ es una superficie racional,

$$q(\mathfrak{S}) = q(\mathbb{P}^1) = 0, p_g(\mathfrak{S}) = p_g(\mathbb{P}^1) = 0 \text{ y}$$
$$\lambda(\mathfrak{S}) = \lambda(\mathbb{P}^2) = 0.$$

Usando esta información y la proposición 4, el número de Euler está relacionado con el número de Picard por las ecuaciones

$$\begin{aligned} e(\mathfrak{S}) &= 12 \\ &= 2b^0(\mathfrak{S}) - 2b^1(\mathfrak{S}) + b^2(\mathfrak{S}) \\ &= 2 - 4q(\mathfrak{S}) + \rho_{\mathfrak{S}} \\ &= 2 + \rho_{\mathfrak{S}} \\ &= 12 \quad . \end{aligned}$$

Por tanto, se sigue que

$$\rho_{\mathfrak{S}} = 10.$$

q.e.d.

De aquí en adelante, nos enfocaremos solamente en fibraciones elípticas semiestables.

Ahora encontraremos una relación entre el rango de Mordell–Weil y el número de valores críticos. Note que el rango de Mordell-Weil de una superficie elíptica es igual al rango de Mordell-Weil de la fibra sobre el punto genérico, en el sentido de esquemas, véase Hartshorne (1977).

Proposición 31: Para una fibración elíptica $\mathcal{S} \to C$ con sección, se satisface la fórmula de Shioda-Tate:

$$\mathrm{P}_{\mathcal{S}} = r + 2 + \sum_{c\in\Delta}(\#\text{componentes}(\mathcal{S}_c) - 1)$$

donde r es el rango de Mordell-Weil de la fibración, $\mathcal{S}_c$ es la fibra sobre $c \in C$ y Δ es el conjunto discriminante de la fibración.

Para su demostración, véase Miranda (1989), corolario VII, 2.4.

Teorema 32: El rango de Mordell-Weil r de (la fibra genérica de) $\mathfrak{S}$ satisface:

$$r = \#\mu_{\text{crit}} - 4.$$

Demostración: La fórmula de Shioda-Tate para $\mathfrak{S}$ es:

$$\rho_{\mathfrak{S}} = r + 2 + \sum_{c\in\mu_{\text{crit}}}(\#\text{componentes}(X_c) - 1).$$

En consecuencia, tenemos que:

$$10 = r + 2 + \sum_{c\in\mu_{\text{crit}}}(\#\text{componentes}(X_c) - 1).$$

Usando (2) esto se simplifica a:

$$10 = r + 2 + 12 - \#\mu_{\text{crit}}.$$

Por tanto:

$$r = \#\mu_{\text{crit}} - 4.$$

q.e.d.

Usando los números de Hodge anteriormente calculados, concluimos que el diamante de Hodge de una superficie elíptica racional $\mathfrak{S}$ es:

$$\begin{matrix} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 0 & & 10 & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{matrix}.$$

Observe que $q(\mathfrak{S}) = 0$, $K_{\mathfrak{S}} \neq 0$ y $K_{\mathfrak{S}}^2 = 0$; entonces $\mathfrak{S}$ es una superficie de Enriques.

Superficies K3

Definición 33: Una superficie K3 definida sobre C es una variedad proyectiva lisa de dimensión 2 con clase canónica trivial y de irregularidad cero. Las superficies K3 pueden verse como una generalización de las curvas elípticas en dos dimensiones.

El diamante de Hodge de una superficie K3 X es:

$$\begin{matrix} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 20 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{matrix}.$$

La sucesión exponencial en este caso muestra que el grupo de Picard $Pic(X)$ se inyecta en la cohomología intermedia $H^2(X,Z)$. Así, $Pic^0(X)$ es trivial, luego el grupo de Picard y el de Néron-Severi son isomorfos. Por el teorema (1,1) de Lefchetz, tenemos que el rango de Néron-Severi de X (*i.e.* su número de Picard) está acotado superiormente por la dimensión de $H^{1,1}(X)$, que es 20.

Las superficies K3 cuyo número de Picard es 20 se llaman *singulares*. Es notable que existen variedades K3 que alcanzan un número de Picard 22. Estas se llaman *súper singulares*, pero solo pueden construirse sobre campos finitos.

Algunas superficies K3 elípticas

Es conocido que, si el número de Picard de una superficie K3 es al menos 5, esta posee al menos una fibración elíptica. Las fibraciones elípticas son herramientas de cálculo muy valiosas, brindan información topológica y geométrica. También tienen un papel importante en Teoría-F.

Construiremos superficies K3 como un cubriente doble ramificado sobre fibras no singulares de superficies elípticas racionales.

Dada S una superficie K3, denote su número de Picard por:

$$\rho_S \coloneqq \rho(S) \coloneqq rank(NS(S)).$$

Defina S como el *pullback* de una fibración elíptica de una superficie elíptica racional con sección $\psi\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{P}^1$, dado por el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{S} \\ \hat{\psi}\downarrow & & \psi\downarrow \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow[2:1]{} & \mathbb{P}^1 \end{array} \quad (3)$$

Donde el cubriente doble π no se ramifica sobre ninguna curva singular. Sea Y_t (resp. X_t) la fibra de S (resp. $\mathfrak{S}$) sobre t.

Proposición 34: S es una superficie K3.

Demostración: Solo necesitamos demostrar que la irregularidad es cero y la clase canónica es trivial.

Sea $\widetilde{X_t}$ una fibra S que se mapea a la fibra X_t de $\mathfrak{S}$, y sean a, b los puntos de ramificación del cubriente doble de $\mathbb{P}^1$. De esta forma tenemos:

$$K_S = \pi^* K_{\mathfrak{S}} + \text{Ramificación} = -2\widetilde{X_\infty} + \widetilde{X_a} + \widetilde{X_b} \sim -2\widetilde{X_\infty} + \widetilde{X_\infty} + \widetilde{X_\infty} \sim 0.$$

Por tanto, la clase canónica es trivial.

Se puede usar la sucesión espectral de Leray para demostrar $q = 0$.

Una forma alternativa para probar $q = 0$ es tomar en cuenta que las fibras singulares se duplican todas, así que la característica topológica de Euler de la fibración es $e(S) = 2e(\mathfrak{S}) = 24$. Usando la fórmula de Noether y el hecho de que $K_S^2 = 0$ (pues S es minimal), obtenemos:

$$\chi(\mathcal{O}_S) = 24/12 = 2$$
$$\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q + p_g = 2 - q$$

De esta manera $q = 0$. *q.e.d.*

Usando los resultados de la sección 4, el rango Mordell-Weil $r_{\mathfrak{S}}$ de la fibra genérica de $(\mathfrak{S})$ satisface:

$$r_{\mathfrak{S}} = \#\mu_{\text{crit}}(\mathfrak{S}) - 4$$

donde $\mu_{\text{crit}}(f)$ es el conjunto de valores críticos de la fibración f. Podemos escribir $\mu_{\text{crit}}(\text{superficie})$ si la fibración de la superficie es conocida y si no hay riesgo de confusión.

Teorema 35: El rango de Mordell-Weil de $\mathfrak{S}$ da una cota inferior para el rango de Mordell-Weil de S, *i.e.*, $r_S \geq r_{\mathfrak{S}}$.

Demostración: Dada una sección σ de $\mathfrak{S}$, existe un mapeo natural a una sección τ de S, dado por:

$$\sigma \mapsto \tau_\sigma \coloneqq (\sigma \circ F, id_{\mathbb{P}^1}).$$

Esto da un homomorfismo del grupo de secciones de $\mathfrak{S}$ al grupo de secciones de S.

Este homomorfismo es inyectivo: suponga que se tienen dos secciones σ_1 y σ_2, tales que $\tau_{\sigma_1} = \tau_{\sigma_2}$. Entonces, para cada $z \in \mathbb{P}^1$ se cumple:

$$\sigma_1(F(z)) = \sigma_2(F(z)).$$

Como F es sobreyectiva, $\sigma_1 = \sigma_2$, en consecuencia el homomorfismo es inyectivo. Dado que este homomorfismo es inyectivo, da una cota inferior para el grupo de secciones de S.

q.e.d.

Teorema 36: Para una superficie K3 elíptica S definida como en el diagrama (3):

$$\rho_S \geq 22 - \#\mu_{\text{crit}}(\mathfrak{S}).$$

La fórmula de Shioda-Tate para S es:

$$\rho_S = r_S + 2 + \sum_{c \in \mu_{\text{crit}}(S)} (\#\text{componentes}(Y_c) - 1).$$

Dado que π no se ramifica en fibras singulares, esta fórmula puede simplificarse, pues el cubriente doble duplica todas las fibras singulares:

$$\rho_S = r_S + 2 + 2\sum_{c\in\mu_{\text{crit}}(\mathfrak{S})}(\#\text{componentes}(X_c) - 1) = r_S + 2 + 2(12 - \#\mu_{\text{crit}}(\mathfrak{S})).$$

Además, dado que $r_S \geq r_{\mathfrak{S}} = \#\mu_{\text{crit}}(\mathfrak{S}) - 4$, obtenemos una expresión simple para la cota inferior del rango de Mordell-Weil de $\boldsymbol{S}$:

$$\rho_S \geq \#\mu_{crit}(\mathfrak{S}) - 4 + 2 + 2(12 - \#\mu_{crit}(\mathfrak{S})) = 22 - \#\mu_{crit}(\mathfrak{S}). \quad (4)$$

q.e.d.

Cálculo de la cota inferior del rango de Mordell-Weil para un caso específico

Usaremos esta cota para calcular explícitamente una cota para una superficie K3 asociada a una superficie elíptica racional.

Defina en coordenadas locales de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ el siguiente pincel:

$$\phi = (x + 1/x)(y + 1/y) = \mu.$$

donde x e y corresponden a $(x{:}\,1)$ y $(y{:}\,1)$, respectivamente.

Este es un pincel de curvas elípticas en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Esto puede comprobarse usando la fórmula de adjunción, considerando que toda curva en este pincel es parte del sistema lineal anticanónico o considerando que $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ es una variedad tórica definida por un polígono reflexivo y usando directamente los resultados de Batyrev (1994) . Este pincel posee 8 puntos base distintos, con coordenadas:

$$(lugarbase) = \{((0{:}\,1), (\pm i{:}\,1)), ((\pm i{:}\,1), (0{:}\,1))$$
$$((1{:}\,0), (1{:}\,\pm i)), ((1{:}\,\pm i), (1{:}\,0))\}.$$

Este pincel puede resolverse al hacer *blowup* de los 8 puntos base, lo cual incrementa en 8 el número de Picard de la superficie. Así, si llamamos $\mathfrak{S}$ a la superficie después de estos *blowup*, tenemos:

$$\rho(\mathfrak{S}) = \rho(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) + 8 = 2 + 8 = 10.$$

Conocemos de antemano que $\rho(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = 2$, ya sea usando la fórmula de Künneth o considerando que $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ es una superficie tórica.

Observe que el número de Picard de $\mathfrak{S}$ concuerda con el número de Picard de una superficie elíptica racional. Claramente, esta superficie elíptica es racional, pues es *blowup* de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ que es racional.

$\mathfrak{S}$ posee al menos una sección. Esto es claro, pues el divisor excepcional correspondiente a cada punto base define una sección.

Para ver explícitamente una de estas secciones, considere la expresión del pincel en una carta afín de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = \{((x{:}\,z), (y{:}\,w)) \mid (x{:}\,z), (y{:}\,w) \in \mathbb{P}^1\}$ dada por $z = 1$ y $w = 1$

$$F = (x^2 + 1)(y^2 + 1) - \mu xy = 0.$$

Ahora, cambiemos variables para trasladar el punto base $x = i, y = 0$ al origen, escogiendo $x = u + i, v = y$.

Realizamos el *blowup* en el origen. El divisor excepcional E es una recta proyectiva. Dando las coordenadas naturales a los puntos del divisor excepcional $(s{:}\,t) \in E$, al tomar el abierto de E dado por $s = 1$ obtenemos un abierto afín de la variedad. Ahí, el pincel tiene la siguiente expresión:

$$\begin{cases} F = ((u + i)^2 + 1)(v^2 + 1) - \mu(u + i)v = 0. \\ v = tu \end{cases}$$

Observe que en cada fibra se cumple:

$$F = u(u + 2i)(v^2 + 1) - \mu(u + i)v = 0.$$

Luego en la cerradura se tiene:

$$2i - i\mu t = 0.$$

es decir, $\psi(t) = 2/t$.

De esto se obtiene una expresión para una sección $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\sigma(t) = 2/t.$$

Es claro que $\psi(\sigma(t)) = t$ para toda $t \neq 0, \infty$. Como esto se cumple en un abierto de Zariski, concluimos que $\boldsymbol{\sigma}$ es una sección. Se comprobará ahora que $\mathfrak{S}$ es minimal.

Un cálculo explícito muestra que el conjunto discriminante de esta superficie es:

$$\mu_{crit} = \mu_{crit(\mathfrak{S})} = \{0, \pm 4, \infty\}.$$

Analizando las matrices hessianas de las singularidades, se concluye que todas son nodales. Un cálculo directo muestra que los componentes de las fibras singulares son todos reducidos, por tanto, la fibración es semiestable.

Los tipos de fibras singulares son:

M	0	−4	−4	∞
Tipo	I_4	I_2	I_2	I_4

Al hacer *blowup* en un punto sobre una curva, disminuye la autointersección de esa curva por 1.

Los 8 puntos base están distribuidos de esta forma: hay 2 puntos base en cada componente de la fibra $\mu = \infty$.

En $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ cada componente C de la fibra $\mu = \infty$ tiene autointersección 0, luego en $\mathfrak{S}$ cada uno tiene autointersección -2.

Los componentes de la fibra $\mu = 0$ son todas rectas, teniendo cada una dos puntos base en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, siendo cada una linealmente equivalente en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ a un componente de $\mu = \infty$, por tanto, cada uno de los componentes tiene autointersección -2 en $\mathfrak{S}$.

Hay dos componentes irreducibles para cada una de las fibras $\mu = \pm 4$. Explícitamente, para la fibra sobre $\mu = 4$, las ecuaciones de las componentes en coordenadas locales x, y son:

$$xy - 1 + i(x - y) = 0,$$
$$xy - 1 - i(x - y) = 0.$$

Cada una de estas componentes toca 4 puntos base. En $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, son curvas de bigrado (1.1), luego su autointersección es 2. De esta forma, en $\mathfrak{S}$ cada una de estas componentes tiene autointersección $2 - 4 = -2$.

Por tanto, la fibración es minimal.

De esta forma, se tiene que el rango de Mordell-Weil de $\mathfrak{S}$ es:

$$r_{\mathfrak{S}} = \#\mu_{crit} - 4 = 4 - 4 = 0.$$

Con lo que obtenemos $r_S \geq 0$.

Y también obtenemos una cota inferior para el número de Picard de S:

$$\rho_S \geq 22 - \#\mu_{crit} = 18.$$

Como consecuencia de este cálculo, podemos ver que esta construcción particular puede indicar una posible forma de encontrar superficies K3 singulares (es decir, con $\rho_S = 20$) o, más en general, una forma de construir superficies K3 en las que es de interés analizar la modularidad de su función L cohomológica.

Observación 37: Es interesante notar que pueden usarse otras técnicas para afinar la cota del número de Picard de una superficie K3 obtenida de esta forma. En particular se pueden usar métodos computacionales para calcular la función *Zeta* y con ello tener una estimación del valor sobre C. Pueden usarse los métodos en campos finitos de Charles, (2011) para encontrar una cota superior, y luego obtenerse un refinamiento de esta cota superior mediante la técnica de Luijk (2007).

Referencias bibliográficas

Barth, W., Hulek, K., & Van de Ven, A. (2004). *Compact Complex Surfaces.* Berlin: Springer-Verlag.

Charles, F. (2011). On the Picard number of K3 surfaces over number fields. *(1111.4117)*. arXiv.

Costa, E., Harvey, D., & Kedlaya, K. (2019). Zeta functions of nondegenerate hypersurfaces. *2*(1), 221-238. doi: 10.2140/obs.2019.2.221

D. Arapura. (2012). *Algebraic Geometry over the Complex Numbers.* New York: Springer-Verlag.

Hartshorne, R. (1977). *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag.

J. Silverman. (1986). *The Arithmetic of Elliptic Curves* (vol. 106). New York: Springer-Verlag .

Kollár, J., & Mori, S. (1998). *Birational Geometry of Algebraic Varieties.* Cambridge University Press.

Luijk, R. V. (2007). K3 surfaces with Picard number one and infinitely many rational points. *Algebra & Number Theory, 1*(1), 1-15. doi: 10.2140/ant.2007.1.1

Miranda, R. (1989). The Basic Theory of Elliptic Surfaces: Notes of Lectures.

Schoen, C. (1988). On fiber products of rational elliptic surfaces with section. *Math. Z.*, *197*(2), 177-199.

Shafarevich, I. (1994). *Basic Algebraic Geometry I* (2.ª ed.). Berlin Heidelberg, Springer-Verlag.

T. Shioda, M., A. (2010). Elliptic Surfaces. *eprint*. arXiv Mathematics e-prints.

V. Batyrev. (1994). Dual Polyhedra and Mirror Symmetry for Calabi-Yau. *Journal of Algebraic Geometry*, 493-535.

Yui, N. (2001). Arithmetic of certain Calabi–Yau varieties, and Mirror Symmetry. *American Mathematical Society*, 505-567.