

*Análisis de inestabilidad de Turing aplicado a un
modelo analítico del ciclo global del carbono*

*Turing instability analysis applied to an analytical
model of the global carbon cycle*

Myrian Sadith González¹
José Mauricio Alvarenga²

Recibido: 13 de enero de 2025
Aceptado: 20 de marzo de 2025

¹ Departamento de Matemática Aplicada, Escuela de Matemáticas y Ciencias de la Computación. Universidad Nacional Autónoma de Honduras. Correo: myrian.gonzalez@unah.edu.hn. ORCID: 0000-0001-9532-5008

² Departamento de Matemática Aplicada, Escuela de Matemáticas y Ciencias de la Computación. Universidad Nacional Autónoma de Honduras. Correo: jose.alvarenga@unah.edu.hn. ORCID: 0009-0001-1083-4880

Resumen

En el estudio del sistema climático, diferentes resultados parten de la premisa que establece que en la atmósfera los gases de efecto invernadero (GEI) están bien mezclados, algunos ejemplos son los escenarios de concentraciones de GEI para proyecciones futuras presentados por el Grupo Intergubernamental de Expertos sobre el Cambio Climático, en donde se asume esa concentración homogénea de los gases. En este trabajo se hace un análisis de estabilidad usando la técnica de patrones de Turing, para un modelo analítico del ciclo global del carbono a fin de determinar si se generan estructuras que concentren los gases en la atmósfera. Para realizar este análisis, primero se presenta la teoría de la inestabilidad de Turing. Después, se examina un modelo analítico simplificado del ciclo global del carbono. Luego, se afina y aplica el método de inestabilidad desarrollado para analizar la concentración de gases al modelo seleccionado. Para finalizar, se presentan algunos resultados encontrados con este estudio en el contexto del cambio climático. Como principal aporte de los hallazgos se destaca que no se ha encontrado evidencia que pruebe la no homogeneidad de GEI en la atmósfera.

Palabras clave: *Cambio climático, Inestabilidad de Turing, Problema de Sturm–Liouville, Ciclo Global del Carbono.*

Abstract

In the study of the climate system, different results are based on the premise that establishes that greenhouse gases (GHG) in the atmosphere are well mixed. Some examples are the GHG concentration scenarios for future projections presented by the Intergovernmental Group of Experts on Climate Change, where this homogeneous concentration of gases is assumed. In this work, a stability analysis is carried out, using the Turing pattern technique, for an analytical model of the global carbon cycle in order to determine if structures are generated that concentrate gases in the atmosphere. To carry out this analysis, first the theory that supports Turing instability was studied. A simplified analytical model of the global carbon cycle was then examined. Then, the instability method developed to analyze gas concentration was refined and applied to the selected model. Finally, some interesting results found with this study in the context of climate change are presented. The main contribution of the findings is that no evidence has been found to prove the non-homogeneity of GHG in the atmosphere.

Keywords: climate change, Turing instability, Sturm–Liouville problem, Global Carbon Cycle

Análisis de inestabilidad de Turing aplicado a un modelo analítico del ciclo global del carbono

Turing instability analysis applied to an analytical model of the global carbon cycle

Introducción

Para la comprensión de diferentes problemas de ciencias e ingeniería es necesario estudiar el comportamiento de la difusión en términos del espacio. Existen diferentes formas de estudiar esta difusión, una popular estrategia fue presentada el año de 1952 por el matemático británico Alan Turing, usualmente denominada como patrones de Turing (Zheng, Shen, & Xu, 2020). En su momento, Turing desarrolló su teoría para comprender mejor el funcionamiento de los patrones que se forman en la superficie exterior del cuerpo de algunos animales e insectos, como los que se encuentran en los tigres o mariposas. Se destaca la importancia del estudio de estos patrones puesto que brindan defensa, favorecen encontrar el alimento y permiten la comunión a las especies animales que los ostentan.

Si bien este tipo de análisis se atribuye a Turing, otros científicos trabajaron antes en temas relacionados, como ejemplo se tienen a las publicaciones realizadas por el biólogo escocés D'Arcy Thompson (Werritty, 2010) en 1917. Por otro lado, aunque inicialmente se aplicaron los patrones de Turing a fenómenos biológicos, después han sido ampliamente utilizados en otras áreas del conocimiento en donde se desee comprender mejor los procesos de reacción difusión como neurología (Cartwright, 2002) o genética (Gaffney & Monk, 2006).

El presente artículo está estructurado de la siguiente manera: la sección dos hace un resumen de la teoría que sostiene el análisis de inestabilidad con base en los patrones de Turing. La sección tres presenta el modelo analítico utilizado para cuantificar el ciclo global del carbono. En la sección cuatro se describe la metodología desarrollada para hacer el estudio de inestabilidad de Turing en el contexto del modelo considerado. Finalmente, en la sección cinco se presentan los resultados encontrados con el estudio de inestabilidad de Turing y sus aplicaciones en el contexto del cambio climático.

Inestabilidad de Turing

Turing logró identificar que las reacciones químicas de los organismos propiciaban los patrones existentes en algunas especies, a partir de ello identificó que en los sistemas biológicos de tales especies se podían presentar ciertas inestabilidades que definen los patrones en la superficie del cuerpo de animales e insectos. En términos generales estas inestabilidades se pueden clasificar así: i. las que oscilan en el tiempo, pero son independientes del espacio; ii. las que varían en espacio, pero no en tiempo; y, iii. las que oscilan tanto tiempo como en espacio (Vanegas, Landinez, & Garzón, 2009). Turing determinó que los patrones en las especies se formaban cuando se presenta una inestabilidad por difusión estacionaria en el tiempo (Vanegas, Landinez, & Garzón, 2009; González, Vanegas, & Garzon, 2009), a lo que después se denominaría inestabilidad de Turing.

Se dice que existe una inestabilidad de Turing cuando el estado estacionario del sistema es estable con pequeñas perturbaciones sin difusión, pero inestable a pequeñas perturbaciones espaciales con difusión (Murray & Dickson, 2003). A partir de lo anterior se puede definir el espacio de Turing conformado por un dominio del espacio de parámetros tal que el modelo es inestable a ciertas perturbaciones espaciales.

Por la naturaleza del modelo seleccionado para representar la dinámica del ciclo global del carbono, a continuación, se detalla el procedimiento para hacer un estudio de inestabilidad de Turing en el caso de un modelo unidimensional en el espacio. Sin embargo, el estudio de inestabilidad también se puede realizar en dos o más dimensiones (Murray & Dickson, 2003; Hirsch, Smale, & Devaney, 2012).

Considere el sistema en una dimensión espacial de reacción difusión definido como sigue

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D\nabla^2 u, \\ (n \cdot \nabla)u(x, t) = 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (I)$$

en donde $u: \Omega \times T \rightarrow R^n$ es una función con $\Omega \subset R^n$ y T es un intervalo de R , f es el término no lineal que expresa la reacción, n es el vector normal unitario y D es la matriz diagonal cuyos componentes constituyen los parámetros de difusión.

Se sabe que la inestabilidad de Turing se presenta cuando el estado estacionario es estable si no hay difusión, entonces se ajusta el modelo suprimiendo el término $D\nabla^2 u$, de tal forma que se obtiene el nuevo sistema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) \quad (2)$$

Con el modelo de la ecuación (2) se prosigue a encontrar los estados estacionarios u_0 , es decir, cuando $f(u) = 0$.

Como se desea garantizar la estabilidad con una pequeña perturbación del estado estacionario, considere el vector $z = u - u_0$ tal que $|z|$ es pequeño. Sustituyendo z en (2) y haciendo un desarrollo en series de Taylor de orden 2, se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial t} = Jz \quad (3)$$

Aplicando el método de separación de variables en (3) se pueden obtener soluciones de la forma $e^{\lambda t}$, con λ autovalor de J . En (Hirsch, Smale, & Devaney, 2012) se establece que la estabilidad está garantizada siempre y cuando la parte real de los autovalores λ sea menor que cero, es decir $Re(\lambda) < 0$. Tomando esta condición se obtienen algunas desigualdades que limitan el espacio de Turing del modelo.

En este punto del análisis de estabilidad, se prosigue a estudiar el sistema ahora considerando la difusión. Primero se linealiza la ecuación (1) con el cambio de variable $z = u - u_0$, con lo que se obtiene:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = Jz + D\nabla^2 z \quad (4)$$

Como es usual, para resolver (4) inicialmente se resuelve el siguiente problema:

$$\begin{cases} Z''(x) + k^2 Z(x) = 0 \\ Z'(0) = Z'(a) = 0 \\ 0 \leq x \leq a \end{cases} \quad (5)$$

Las ecuaciones en (5) definen un problema de Sturm-Liouville y como es sabido, este problema tiene infinitas soluciones de la forma $\cos(n\pi x/a)$ donde $k = n\pi/a$ como se muestra en (Myint-U & Tyn, 2007). Específicamente, a los valores de k se les suele denominar autovalores del problema. Para resolver el problema se conjetura que su solución es de la forma

$$z = v e^{\lambda t} Z(x) \quad (6)$$

con $v \in R^n$ fijo y no nulo, además, tanto v como λ son incógnitas. Sustituyendo (6) en (4) se llega a que las incógnitas de v y λ deben satisfacer la siguiente igualdad

$$(\lambda I - J + k^2 D)v = 0 \quad (7)$$

Para encontrar una solución no trivial de (7) se debe cumplir que la matriz $\lambda I - J + k^2 D$ sea singular, es decir, $|\lambda I - J + k^2 D| = 0$. Para mayor comodidad en el análisis, se define el polinomio

$$p(\lambda) = |\lambda I - J + k^2 D| \quad (8)$$

Por lo tanto, para que se presente la inestabilidad de Turing es suficiente garantizar que al menos una de las raíces del polinomio p de (8) tenga parte real positiva.

Descripción del modelo

En este trabajo se consideró un modelo analítico simplificado del ciclo global del carbono que fue publicado en el año 2018 por Lade (Lade, y otros, 2018). El referido modelo es una versión estilizada de modelos del sistema de la Tierra (ESM en inglés), para mantener su simplicidad se han realizado muchos ajustes en su planteamiento, por ejemplo: no se especifica la estratificación oceánica, es decir, el modelo no hace distinciones en las diferentes capas de profundidad del océano.

Diferentes dinámicas de la biósfera terrestre no se consideran, como en el caso de incendios forestales, talas masivas o extinción de áreas forestales por plagas; sin embargo, para los propósitos de este trabajo, el modelo brinda resultados valiosos que pueden facilitar la comprensión y planteamiento del análisis de estabilidad en modelos más complejos.

Una descripción esquemática de los procesos que se incluyen para modelar los flujos de carbono se ilustra en la Figura 1.

Cambio del flujo de carbono en suelos	Captación por productos primarios	Emisión por respiración del suelo	Emisión por el uso del suelo
Cambio del flujo de carbono en océanos	Captación en la capa mixta superior	Transporte por la solubilidad	Transporte por la bomba biológica
Cambio del flujo de carbono en atmosfera	Emisión por combustión fósil	Emisión por respiración del suelo	Emisión por el uso del suelo
	Captación por productos primarios	Captación en la capa mixta superior	

Figura 1. Descripción de los procesos incluidos para modelar el ciclo global del carbono.
Fuente: Elaboración propia.

Las ecuaciones del modelo que describen los intercambios de carbono en suelos (C_t), capa mixta superior del océano o simplemente océanos (C_m), atmósfera (C_a) y el

cambio en temperatura (ΔT), se describen seguidamente. Los valores de los coeficientes utilizados se muestran en la Tabla 1, las representaciones matemáticas de los procesos han sido tomados de (Lade, et al., 2018).

Carbono en suelos

A grandes rasgos se puede establecer que en el intercambio de carbono en suelos existen dos procesos: el primero que permite la captación de carbono de la atmósfera representado por $PPN_0(1 + K_C \log(C_a/C_{a0}))$ y el segundo que constituye la liberación de carbono. Esta emisión de carbono se distribuye en dos subprocesos: la emisión por respiración del suelo, es decir, por la actividad de las bacterias y similares, modelado por $PPN_0 C_t/C_{t_0} Q_R^{\Delta T/10}$ y la emisión por el uso del suelo $LUC(t)$ que incluye procesos como el cambio por la silvicultura (Marianne & Heath, 2012), con lo que se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{dC_t}{dt} = F_1 = PPN_0 \left(1 + K_C \log \left(\frac{C_a}{C_{a0}} \right) - \frac{C_t}{C_{t_0}} Q_R^{\Delta T/10} \right) - LUC(t) \quad (9)$$

Carbono en océanos:

Con respeto a los océanos, que constituyen los bancos de almacenamiento más grandes de carbono en el planeta (Jaramillo, 2004), se tiene que también el intercambio se presenta en dos vías: la captación de los organismos de la parte superior de los océanos, como el plancton, y representado por $D_a C_{m0}/rp(C_{m0}, 0)(C_a - p(C_m, \Delta t))$. Por otra parte, se da la captación de carbono, es decir, el transporte a las profundidades y se da por dos vías: con el proceso físico químico de la solubilidad que lo representa $\omega_0(1 - \omega_T \Delta T)(C_m - C_{m0})$ y el transporte por la biota bilógica (Tribbia, 2023) modelado por $B(\Delta T) + B(0)$, por lo tanto, el intercambio se puede representar como sigue:

$$\frac{dC_m}{dt} = F_2 = \frac{D_a C_{m0}}{rp(C_{m0}, 0)} (C_a - p(C_m, \Delta t)) - \omega_0(1 - \omega_T \Delta T)(C_m - C_{m0}) - B(\Delta t) + B(0). \quad (10)$$

Carbono en atmósfera

Naturalmente el carbono en la atmósfera está condicionado también por los intercambios que se dan en los océanos y suelos. De tal forma que el cambio se puede presentar como sigue:

$$\frac{dc_a}{dt} = F_3 = e(t) - NPP_0 \left(1 + K_c \log \left(\frac{c_a}{c_{a0}}\right)\right) + \frac{NPP_0}{c_{t0}} Q_R^{\Delta T/10} + LUC(t) - \frac{D_a c_{m0}}{r c_{a0}} (c_a - p(c_m, \Delta T)) \quad (11)$$

Se destaca la inclusión de la función e dependiente del tiempo, con esta función se desea integrar el carbono emitido por la actividad humana. Debido a la naturaleza simplificada del modelo, no se especifica por país como se determina esta función ya que cada país obtiene su propia aproximación usando diferentes métodos. En aquellas economías frágiles que no hacen estudios exhaustivos para determinar la emisión de carbono per cápita se suele hacer una aproximación simplista a partir de su producto interno bruto, esta consideración se justifica en que el mayor peso de las emisiones de carbono por actividad antropogénica recae en el carbono liberado por combustión fósil y la producción de petróleo e industria. Tanto en la función LUC como en e no se ha utilizado una expresión analítica, para su tratamiento se tomaron los datos históricos reconstruidos desde el año 1750 hasta el 2011 (ICOS, 2020; NOAA, 2020) y trayectorias de concentración representativas (RCP en inglés) para el 2012 hasta el año 2100 (PICIR, 2020).

Cambio en la temperatura

Se incluye en el modelo una ecuación para modelar el cambio de temperatura, porque esta, a su vez modula la emisión y captación de carbono; por ejemplo, se sabe que aguas más cálidas son menos eficientes para transportar a las profundidades el carbono (Rodrigo & Cristian, 2008). La ecuación que describe el cambio de temperatura fue propuesta por (Kellie-Smith, Owen, Cox, & M, 2011) y se define a continuación:

$$\frac{d\Delta T}{dt} = F_4 = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\lambda}{\log 2} \log \left(\frac{c_a}{c_{a0}} \right) - \Delta T \right) \quad (12)$$

Se finaliza la formulación del modelo incluyendo una función que depende del carbono en océanos y el cambio de temperatura, estas dos variables están estrechamente relacionadas porque los océanos constituyen el mayor sumidero de carbono del planeta. La referida función se denota por $p(C_m, \Delta T)$ y cuantifica la relación entre el cambio de temperatura y el carbono en los océanos de esta manera:

$$p(C_m, \Delta T) \equiv C_{a0}/(1 - D_T \Delta T)(C_m/C_{m0})^r \quad (13)$$

Toda la construcción del modelo que se describió anteriormente fue propuesta en (Lade, et al., 2018), este trabajo aporta al modelo la inclusión de términos de difusión hipotéticos de carbono y la inclusión de una variable espacial, obteniendo así un modelo que describe la dinámica global de carbono con difusión en tiempo y espacio. Se dice que los términos de difusión son hipotéticos porque si bien en la práctica hay actividades humanas o naturales que emiten carbono de forma centralizada, los coeficientes que se han utilizado en esta investigación no se basan en un experimento o difusión real, sino que han sido considerados en un espacio ilustrativo, tal como se describe en la sección cuatro. Con las ecuaciones (9), (10), (11) y (12) el modelo que incluye dos variables independientes, una para tiempo y otra para el espacio, se puede expresar de forma simplificada como sigue:

- a. Cambio del carbono en suelos con respecto al tiempo: $\frac{\partial C_t}{\partial t} = F_1 \quad (13)$
- b. Cambio del carbono en océanos con respecto al tiempo: $\frac{\partial C_m}{\partial t} = F_2 + \delta_2 \nabla^2 C_m$
- c. Cambio del carbono en atmósfera con respecto al tiempo: $\frac{\partial C_a}{\partial t} = F_3 + \delta_3 \nabla^2 C_a$
- d. Cambio de la temperatura con respecto al tiempo: $\frac{\partial \Delta T}{\partial r} = F_4 + \delta_4 \nabla^2 \Delta T$

tal que F son las funciones que modelan los flujos de carbono que se definieron previamente δ y es el coeficiente de difusión, se ha considerado a $\delta_1 = 0$ ya que no suele ser usual que exista la difusión de carbono terrestre. Por otro lado, se tiene que $0 \leq \delta_i$ para $i = 2, 3, 4$ a manera de considerar el efecto de una componente difusiva en el sistema.

Descripción del método

A continuación, se indican algunas consideraciones que detallan el análisis de inestabilidad realizado:

- i. Si bien el modelo considerado es una versión simplificada de la dinámica que hay con el intercambio del carbono en el sistema climático, existe una amplia complejidad para la elaboración del análisis de la inestabilidad de Turing de forma analítica, por ello se realizó dicho análisis desde un enfoque numérico; para este fin se usó Python como lenguaje de programación para este fin.
- ii. Los valores de los coeficientes de difusión, δ_2 , δ_3 y δ_4 , no tienen un fundamento real en este modelo, es decir, la inclusión de la difusión es un aporte de este trabajo por lo que tales valores no fueron tomados de ninguna observación o base de datos. En su lugar, se consideraron valores de 0 a 1, simulando una proporción o valor escalado de algún porcentaje que contemplara tal difusión. En este sentido, para poder concretar el modelo, los valores de difusión se formaron por medio de triadas del espacio $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$; la discretización se hizo tomando los valores de 0, 0.001, 0.01, 0.1 y 1 para cada coeficiente de difusión, generando así 125 casos y considerando 31 puntos equidistantes en $[0, 100]$ para k . Se puede destacar que al haber optado por valores en este espacio es posible considerar casos donde, por ejemplo, se pueda tener una difusión alta en los océanos (δ_2 grande) pero una difusión leve en atmósfera (δ_3 pequeño).
- iii. La rutina en Python que se implementó para hacer el análisis de Turing se describe, en términos generales, así: primero, se selecciona una tripleta para los coeficientes de difusión δ_2 , δ_3 y δ_4 , del mapeo indicado en el inciso anterior. Segundo, se toma un dominio discreto de valores para el autovalor k de (7) y con ayuda de un método numérico se encuentra la máxima parte real de las raíces de (8). El método puede o no ser implementado desde cero, existen una gran cantidad de rutinas predefinidas en diferentes lenguajes o softwares que permiten resolver el sistema. Tercero, se aplica el criterio para determinar la existencia o no de la inestabilidad: si alguna de estas raíces tiene parte real positiva entonces se daría lugar a la inestabilidad de Turing.

Ya que sería tediosa la revisión de cada raíz, aunque estas son finitas, una posibilidad más agradable para una comprensión rápida del comportamiento de tales raíces consiste

en su visualización gráfica, tal como se hizo en el presente trabajo. Para la elaboración de la gráfica se considera el conjunto de valores discretos de k y sus respectivas máximas partes reales de tal forma que se genera una curva en el plano, misma que permite a simple inspección catalogar su comportamiento en alguna región en específico.

Resultados

Por medio de la rutina implementada para este trabajo, donde se usó principalmente la función *eigvals* de *numpy* para el cálculo de los autovalores, se pudo crear la Figura 2. A partir de esta gráfica se pueden observar las curvas generadas para las triadas construidas considerando los coeficientes de difusión, tal que $0 < \delta_i \leq 1$ para $i = 2, 3, 4$. Fácilmente se puede apreciar que todas las curvas se ubican en una región donde su rango es negativo, se interpreta este comportamiento como que en ninguno de los casos considerados se presenta la inestabilidad de Turing para el sistema (13). La gráfica se pudo construir usando las funciones de *matplotlib* de Python.

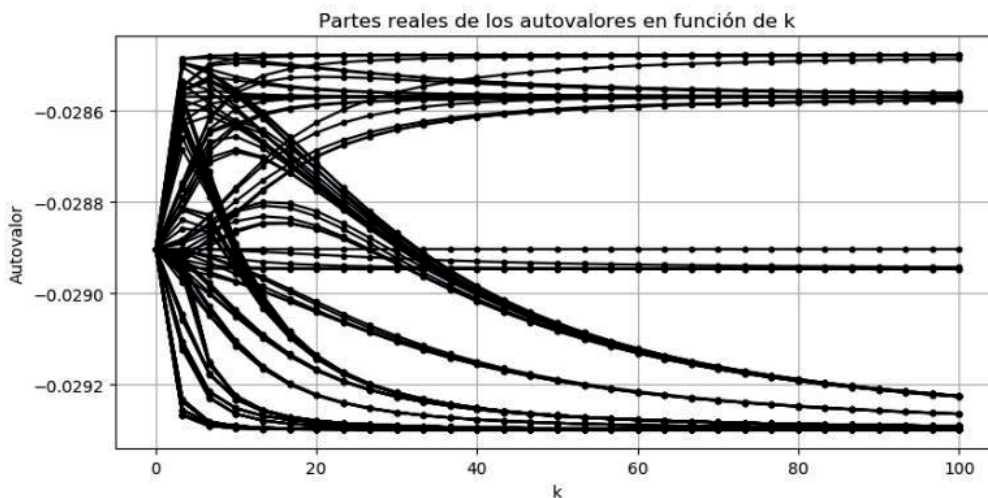


Figura 2. Distribución de la parte real de los autovalores del polinomio característico del modelo con términos de difusión

Por lo tanto, por medio del estudio realizado para este trabajo se puede constatar que con base en los parámetros utilizados y el modelo construido con el término que representa hipotéticamente la difusión no se presenta una inestabilidad de Turing. En el contexto real del fenómeno, con el estudio de la inestabilidad de Turing que se realizó se confirma que existe homogeneidad en la concentración de carbono, pese a la existencia de circunstancias que conlleven altas emisiones como en un incendio forestal de gran magnitud. Entonces, aunque en un punto específico de la atmósfera terrestre haya una fuente que está emitiendo más carbono, con el tiempo, según lo comprobado con esta investigación, se sabe que la concentración se hará homogénea.

En especial, este resultado es destacable y representa un aporte importante para modelos enfatizados en el cambio climático, ya que contribuye a una mejor toma de decisiones y el perfeccionamiento de las políticas públicas actuales (Change & Stocker, 2014), debido a que dictamina que, aunque las aportaciones de carbono de parte de las economías de los diferentes países no son iguales estas si se distribuyen uniformemente. Con lo anterior, por medio de un análisis matemático aplicado a un modelo de carbono, se brinda una prueba más para justificar el principio de responsabilidad compartida ante el cambio climático, es decir, la no equidad de emisiones de carbono que, en general, promueven el calentamiento climático afectan homogéneamente a todo el planeta.

Referencias

- CARTWRIGHT, J. H. (2002). Labyrinthine turing pattern formation in the cerebral cortex. *Journal of theoretical biology* 217, 1, 97–103.
- CHANGE, I. P., & STOCKER, T. (2014). *Climate Change 2013: The Physical Science Basis: Summary for Policy Makers; a Technical Summary and Frequently Asked Questions; a Report of Working Group I of the IPCC*. Cambridge University Press.
- GAFFNEY, E., & MONK, N. (2006). Gene expression time delays and turing pattern formation systems. *Bulletin of mathematical biology* 68, 1, 99–130.
- GONZÁLEZ, L. A., VANEGAS, J. C., & GARZON, D. A. (2009). Formación de patrones en sistemas de reacción-difusión en dominios crecientes. *Revista Internacional de Métodos Numéricos* 25, 2, 145–161.
- HIRSCH, M. W., SMALE, S., & DEVANEY, R. L. (2012). Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. *Academic press*.
- ICOS. (2020, noviembre). *Global carbon budget*. Retrieved from <https://www.global-carbonproject.org/carbonbudget/>

- JARAMILLO, V. J. (2004). El ciclo global del carbono. Cambio climático: una visión desde México, 77(1), 77-85.
- KELLIE-SMITH, OWEN, COX, & M, P. (2011). Emergent dynamics of the climate--economy system in the Anthropocene. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 868-886.
- LADE, S. J., DONGES, J. F., FETZER, I., ANDERIES, J. M., BEER, C., CORNELL, S. E., & STEFFEN, W. (2018). Analytically tractable climate-carbon cycle feedbacks under 21st century anthropogenic forcing. *Earth System Dynamics*, 9(2), 507-523. (n.d.).
- MARIANNE, B. K., & HEATH, L. (2012). Actividades sobre uso de la tierra, cambio del uso de la tierra y silvicultura. *Fondo para el Medio Ambiente Mundial*.
- MURRAY, & DICKSON, J. (2003). Spatial models and biomedical applications. *Mathematical Biology, Springer*.
- MYINT-U, & TYN. (2007). Linear partial differential equations for scientists and engineers. *Birkhäuser*.
- NOOA. (2020, noviembre). *Anomalías del cambio de temperatura media mundial superficial*. Retrieved from <https://www.ncdc.noaa.gov/monitoring-references/faq/anomalies.php>
- PICIR. (2020, noviembre). *RCP scenario*. Retrieved from <http://www.pik-potsdam.de/mmalte/rcps/>
- RODRIGO, & CRISTIAN. (2008). La Corriente Circumpolar Antártica y su influencia en el clima. *INACH, Punta Arenas (Chile)*.
- TRIBBIA, J. D. (2023). La producción primaria del océano y su función reguladora del clima, a partir de la toma de Dióxido de Carbono Atmosférico. *Escuela de Ciencias del Mar. Sede Educativa Universitaria*.
- VANEGAS, J., LANDINEZ, N., & GARZÓN, D. (2009). Análisis de la inestabilidad de Turing en modelos biológicos. *Dyna*, 123-134.
- WERRITTY, A. (2010). D'Arcy Thompson's On Growth and Form and the rediscovery of geometry within the geographic tradition. *Scottish Geographical Journal*, 231-257.
- ZHENG, Q., SHEN, J., & XU, Y. (2020). Turing instability in the reaction-diffusion network. *Physical Review E*, 062215.

Tabla 1. Valores de parámetros utilizados en el modelo

Símbolo	Nombre del parámetro	Valores iniciales	Valor
C_{a0}	Carbono atmosférico estimado en la época preindustrial		589 PgC
C_{t0}	Carbono terrestre estimado en la época preindustrial		1875 PgC
C_{m0}	Carbono oceánico estimado en la época preindustrial		900 PgC
Parámetros usados para la modelación del carbono terrestre			
Q_R	Dependencia de la temperatura de la respiración terrestre		1,72
PPN_0	Absorción neta de carbono de la atmósfera en la época preindustrial		55 PgC/año
K_c	Efecto de la fertilización		0,3
Parámetros usados para la modelación del carbono en océanos			
B_0	Bomba biológica en la época preindustrial		13 PgC/año
B_T	Temperatura dependiente de la bomba biológica		0,023/K
ω_0	Tasa de solubilidad de la bomba biológica		0,1/año
ω_T	Debilitamiento de la solubilidad de la bomba biológica bajo el cambio climático		0,1/K
D_a	Tasa de equilibrio de carbono en la capa mixta superior del océano		1/año
D_T	Efecto de la solubilidad en la temperatura		0,0423/K
r	Factor Revelle		12,5
Parámetros usados para la modelación del cambio de temperatura			
τ	Tiempo de respuesta para un retraso climático		4 años
λ	Factor de sensibilidad del clima		1,8K