

Modelo numérico de movimiento ondulatorio en un medio heterogéneo no isotrópico bajo condiciones de estabilidad orbital

Fredy Vides*

RESUMEN

El objetivo principal de este escrito es modelar un fenómeno de movimiento ondulatorio bajo condiciones dinámicas de estabilidad orbital en un medio heterogéneo no-isotrópico para ello utilizaremos métodos miméticos de diferencia finita, con esto en mente construiremos representaciones discretas de operadores diferenciales en el espacio con coeficientes variables y sus respectivos consideraciones en la frontera, luego combinaremos estas representaciones con un esquema adaptativo de integración temporal para el cálculo de la historia del fenómeno, finalmente validaremos la convergencia del método presentado aquí para la modelización del fenómeno a través de algunos experimentos de interés.

Palabras clave: *Ecuación de Onda, Métodos Miméticos, Integración Temporal, Operadores diferenciales espaciales, Medio No Isotrópico, Estabilidad Orbital.*

ABSTRACT

The main objective of this paper is to present a model of wave motion under dynamical conditions of orbital stability in heterogeneous non-isotropic media using finite difference mimetic methods, with this in mind we will build up discrete representations of spatial differential operators with variable coefficients and its respective boundary considerations, after this we'll combine these representations in an adaptive time integration scheme for the computation of the phenomena history, finally we'll validate method's convergence presented here using some interesting experiments.

Keyword: *Wave Equation, Mimetic Methods, Time Integration, Spatial Differential Operators, Non-Isotropic Media, Orbital Stability.*

* Fredy Vides, fvides@unah.edu.hn

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de Honduras

INTRODUCCIÓN

En este artículo estudiaremos un caso particular de la Ecuación de Onda Estándar que tiene la forma:

$$\psi_{tt} - [\nabla \circ (k\nabla)]\psi + l\psi = \varphi, (x, t) \in \Omega \times R_0^+ \quad (1.1)$$

donde también satisface las relaciones:

$$B\psi = \psi_b, (x, t) \in \partial\Omega \times R_0^+ \quad (1.2)$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x) \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x) \quad x \in \bar{\Omega} \quad (1.3)$$

Aquí (1.2) y (1.3) son condiciones de frontera e inicial respectivamente, para nuestro estudio consideraremos como el Operador de Condición de Dirichlet y además

$$k(x, t) = \kappa(x) \quad l(x, t) = \lambda(x) \quad \varphi(x, t) = 0 \quad (1.4)$$

Tomaremos en cuenta esencialmente dos casos, cuando una onda solitaria se desenvuelve en un medio y cuando un sistema de al menos dos ondas comparten el mismo medio y a la vez satisfacen una variación de (1.1), (1.2) y (1.3) en la forma

$$\Psi_{tt} - [\nabla \circ [\kappa\nabla]]\Psi = \Lambda\Psi, (x, t) \in \Omega \times R_0^+ \quad (1.5)$$

$$B\Psi = \Psi_b, (x, t) \in \partial\Omega \times R_0^+ \quad (1.6)$$

$$\Psi(x, 0) = \Psi_0(x) \quad \Psi_t(x, 0) = \Psi_1(x) \quad x \in \bar{\Omega} \quad (1.7)$$

Aquí

$$\Psi : \bar{\Omega} \times R_0^+ \mapsto R^n \quad (1.8)$$

$$\kappa : R^n \mapsto R^{n \times n} \quad (1.9)$$

$$\Lambda : R^n \mapsto R^n \quad (1.10)$$

Como puede verse en (1.5) hay un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden en tiempo y espacio, algo que será útil para el tratamiento numérico de este problema será definir la variable, relacionada con en la forma:

$$\Psi_t = \Phi \quad (1.11)$$

Esto lleva a

$$\begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \llbracket \nabla \circ [\kappa \nabla] \rrbracket + \Lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_b \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

donde (1.12) es claramente un sistema de primer orden en el tiempo, que satisfará

$$\begin{bmatrix} \Psi(x,0) \\ \Phi(x,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_0(x) \\ \Psi_1(x) \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

En las secciones siguientes definiremos las representaciones discretas *DKG* para $\llbracket \nabla \circ [\kappa \nabla] \rrbracket$ y $M = [DKG + \Lambda]$ para $M = \llbracket \nabla \circ [\kappa \nabla] \rrbracket + \Lambda$, luego combinaremos esto en un método numérico que resuelve el problema mixto:

$$\begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 0 & I \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi_b \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

sujeto a (1.13).

REPRESENTACIONES DE DIFERENCIA FINITA PARA OPERADORES DIFERENCIALES EN EL ESPACIO

Antes de comenzar con la discretización de un operador diferencial daremos un vistazo rápido a algunos conceptos básicos.

1. Fundamentos de Aproximaciones de Diferencia Finita

Tomemos la definición usual derivada de una función con respecto a una variable evaluada en un punto específico x_0 :

$$D_x \psi(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\psi(x_0 + h) - \psi(x_0)) \quad (2.1.1)$$

una idea para calcular un valor aproximado de (2.1.1) podría ser

$$D_x \psi(x_0) \approx \frac{1}{h} (\psi(x_0 + h) - \psi(x_0)), 0 < h \ll 1 \quad (2.1.2)$$

por supuesto si queremos calcular una aproximación de (2.1.1) algo importante será que tan precisa será dicha aproximación. Para contestar esta pregunta haremos uso de otro clásico del cálculo como es la **Expansion de Taylor de una Función**.

Dada una función $\psi(x)$ se dice ser analítica al rededor de x_0 si existe una expansión de Taylor de ψ en la forma

$$\psi(x_0 + h) = \lim_{N \rightarrow \infty} T_{x_0}^{h,N} \psi = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{D_x^k \psi(x_0)}{k!} h^k \quad (2.1.3)$$

Aquí llamamos a $T_{x_0}^{h,N}$ el operador de Taylor de N-ésimo orden alrededor de x_0 relativo a h o solo el Operador de Taylor, puede verse que si tomamos el primer y tercer término de (2.1.3) y luego sustraemos $\psi(x_0)$ a ambos lados seguido de una multiplicación por $1/h$ obtenemos

$$\frac{1}{h} (\psi(x_0 + h) - \psi(x_0)) \approx Ch \quad (2.1.5)$$

la expresión anterior nos dice que (2.1.2) tiene un orden de error h o donde \mathcal{E} Denota el error, en otras palabras el error en la aproximación de (2.1.1) usando (2.1.2) es casi igual a una constante C por h , donde C no responde de h

Siguiendo el procedimiento anterior y varias expansiones de Taylor podemos encontrar aproximaciones de más alto orden para las derivadas, pero otra forma de conseguir esto es **Proyectar** el operador D sobre Π_n , donde Π_n es el espacio lineal de los polinomios de a lo sumo grado "n", utilizando esto y algunas propiedades de las Expansiones de Taylor obtenemos.

Teorema 2.1

Si tenemos un conjunto de Números

$$X_n = \{x_k : (\forall k \in Z_0^n \subset Z_0^+) (x_k \in \Omega \subseteq Dom(\psi))\}$$

y un correspondiente conjunto de valores

$$\Psi_n = \{\psi_k : \psi_k = \psi(x_k), x_k \in X_n\}$$

Para una función específica ψ si esta función es analítica en Ω y si podemos aproximarla en Ω por un polinomio de la forma $P_n[\psi](x)$ que satisfaga $P_n[\psi](x_i) = \psi(x_i)$

Luego una fórmula de diferenciación que es exacta para tal polinomio también satisface

$$(\forall x \in X_n) (\mathcal{E} = O(h^n))$$

Demostración

Sea

$$L_n^i(x) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} (x - x_k) \quad (2.1.1.1)$$

Y

$$\ell_n^i(x) = \frac{L_n^i(x)}{L_n^i(x_i)} \quad (2.1.1.2)$$

luego puede verse que

$$\ell_n^i(x) = \frac{L_n^i(x)}{L_n^i(x_i)} \quad (2.1.1.3)$$

al mismo tiempo si usamos las propiedades analíticas de Ψ y un poco de álgebra y calculo obtenemos en cada punto x_i de X_n .

$$\begin{aligned} l_{N \rightarrow \infty} T_{x_k}^{h,N}(\Psi - P_n[\Psi](x)) &= \\ &= l_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{D_x^k \Psi(x_i)}{k!} h^k \end{aligned} \quad (2.1.1.4)$$

si en esta expresión aplicamos D_x a los dos lados obtenemos

$$\begin{aligned} l_{N \rightarrow \infty} T_{x_i}^{h,N}(D_x \Psi - D_x P_n[\Psi](x)) &= l_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{D_x^k \Psi(x_i)}{k!} D_x h^k = \\ &= l_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{D_x^k \Psi(x_i)}{(k-1)!} h^{k-1} = l_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^N \frac{D_x^k \Psi(x_i)}{k!} h^k \end{aligned} \quad (2.1.1.5)$$

De lo anterior se desprende que el error de esta aproximación para $0 < h \ll 1$

Satisface

$$l_{N \rightarrow \infty} T_{x_i}^{h,N}(D_x \Psi - D_x P_n[\Psi](x)) \approx C_i h^n \quad (2.1.1.6)$$

Donde cada C_i no depende de h y esto concluye nuestra demostración. Para ordenes mayores de diferenciación el orden de la aproximación puede ser influenciado por la selección del conjunto X_n y el método de interpolación sin embargo para los llamados **valores centrales** el orden de error sigue un patrón como el mostrado en la anterior demostración.

Del teorema 2.1 vemos que un punto clave es encontrar una formula de diferenciación que sea exacta para los polinomios descritos en el teorema, un procedimiento que puede utilizarse con este fin es construir la llamada matriz de diferenciación que satisface.

$$D = [d_{i,j}]_{(n+1) \times (n+1)} \quad (2.1.6)$$

y

$$\Phi_n = D\Psi_n \quad (2.1.7)$$

donde

$$\Phi_n = \{ \phi_k : \phi_k = D_x P[\Psi](x_k), x_k \in X_n \} \quad (2.1.8)$$

Teorema 2.2

Para un polinomio dado $P_n[\Psi](x)$ como descrito en el teorema 2.1 una matriz D que satisface (2.1.6) (2.1.7) tiene las siguientes entradas

$$d_{i,i} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} (x_i - x_k)^{-1}$$

$$d_{i,j} = \frac{L_n^i(x_j)}{L_n^j(x_i)(x_i - x_j)}$$

Donde $L_n^i(x)$ fue definido en 2.1.1.1

Demostración

Dado

$$\ell_n^j(x) = \frac{L_n^j(x)}{L_n^j(x_j)}$$

podemos tomar el log a ambos lados de la expresión para obtener

$$\log(\ell_n^j(x)) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \log(x - x_k) - \log(L_n^j(x_j))$$

si diferenciamos a ambos lados obtendremos luego de un poco de algebra

$$D_x \ell_n^j(x) = \ell_n^j(x) \left[\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \frac{1}{x - x_k} \right]$$

usando esto y considerando que

$$d_{i,j} = D_x \ell_n^j(x_i)$$

podemos ver que para $i = j$

$$D_x \ell_n^j(x_j) = \ell_n^j(x_j) \left[\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \frac{1}{x_j - x_k} \right] = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \frac{1}{x_j - x_k}$$

y para $i \neq j$

$$\begin{aligned} D_x \ell_n^j(x_i) &= \ell_n^j(x_i) \left[\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \frac{1}{x_i - x_k} \right] = \\ &= \frac{1}{L_n^j(x_j)} \left[L_n^j(x_i) \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \frac{1}{x_i - x_k} \right] = \\ &= \frac{1}{L_n^j(x_j)} \left[\prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i, j}} (x_i - x_k) \right] = \\ &= \frac{1}{L_n^j(x_j) (x_i - x_j)} \left[(x_i - x_j) \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i, j}} (x_i - x_k) \right] = \\ &= \frac{1}{L_n^j(x_j) (x_i - x_j)} [L_n^j(x_i)] \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración.

Si escogemos X_n de tal modo que

$$(\forall x_p \in X_n) (\forall x_m \in X_n) (m > p \Rightarrow x_m = x_p + (m - p)h) \quad (2.1.9)$$

donde

$$h = \frac{[\max(X_n) - \min(X_n)]}{n} \quad (2.1.10)$$

luego el método basado en el **Teorema 2.2** da como resultado las así llamadas fórmulas de diferencia finita.

Un importante ejemplo de esto es la aproximación de diferencia central a tres puntos de la primera derivada que puede obtenerse de la siguiente forma

sea $X_x = \{-h, 0, h\}$ para una $h \in R^+$ dada.

luego

$$\Phi_n^1 = D_1 \Psi_n \quad (2.1.11)$$

Aquí Φ_n^1 y D_1 denotan la segunda componente del vector Φ_n y el segundo renglón de la matriz D respectivamente en (2.1.11) D_1 está dado por

$$D_1 = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & & 2 \end{bmatrix} \quad (2.1.12)$$

Examinando (2.1.12) podemos ver si escogemos $h = 1$ para X_n obtendremos una fórmula igual a (2.1.12) sin el factor $1/h$ esto nos lleva a pensar que si obtenemos una fórmula de esta manera podremos modificarla para un valor particular de h con solo multiplicar la respectiva matriz de diferenciación por $1/h$.

La expresión obtenida en (2.1.12) es una fórmula de 2^{do} orden, y será de mucha utilidad en la siguiente sección.

2. Representación Discreta de los Operadores div y grad en Rejillas Escalonadas

Una rejilla escalonada es un conjunto de puntos que puede interpretarse de la siguiente forma

Dados

$$X_n^l = \{x_i : x_i \in R; 0 < i, p < N; i, p \in Z_0^+; x_{i+p} > x_i\} \quad (2.2.1)$$

$$X_n^p = \{x_{i+1/2} : x_{i+1/2} \in R; 0 \leq i, p < N; i, p \in Z_0^+; x_{i+p+1/2} > x_{i+1/2}\} \quad (2.2.2)$$

y

$$X_n^F = \{x_i : x_i \in R, i = \{0, N\}\} \quad (2.2.3)$$

En (2.2.1) y (2.2.2) es fijado solo para establecer un orden e i varía entre 0 y N luego una rejilla escalonada es el conjunto

$$X_n^s = X_n^I \cup X_n^p \cup X_n^F \quad (2.2.4)$$

Antes de definir las representaciones discretas de los operadores **div** y **grad**, daremos un vistazo a una importante relación entre estos dos operadores.

Tomemos un par de funciones

$$\psi : R^n \supset \Omega \mapsto R \quad (2.2.5)$$

$$\Psi : R^n \supset \Omega \mapsto R^n \quad (2.2.6)$$

que satisfacen

$$\int_{\partial\Omega} \psi \Psi \cdot n = 0 \quad (2.2.7)$$

Donde $\partial\Omega$ es una superficie cerrada dada, podemos ver que

$$\nabla \cdot [\psi \Psi] = \nabla \psi \cdot \Psi + \psi \nabla \cdot \Psi \quad (2.2.8)$$

Y si ahora integramos (2.2.8) sobre la región Ω que está encerrada por $\partial\Omega$, podemos aplicar el **teorema de la divergencia** y obtener

$$\int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \Psi + \int_{\Omega} \psi \nabla \cdot \Psi = \int_{\partial\Omega} \psi \Psi \cdot n \quad (2.2.9)$$

Luego aplicando (2.2.7) obtenemos el siguiente resultado

$$\int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \Psi = - \int_{\Omega} \psi \nabla \cdot \Psi \quad (2.2.10)$$

Si definimos dos productos internos equivalentes en la forma

$$\langle (\cdot) | (\cdot) \rangle_{CV} = \int_{\Omega} (\cdot) \bullet (\cdot) \quad \langle (\cdot) | (\cdot) \rangle_{CE} = \int_{\Omega} (\cdot) (\cdot) \quad (2.2.11)$$

luego (2.2.10) puede reescribirse en la forma

$$\langle \nabla \Psi | \Psi \rangle_{CV} = -\langle \Psi | \nabla \cdot \Psi \rangle_{CE} \quad (2.2.12)$$

lo cual puede interpretarse como

$$grad = -div^* \quad (2.2.12)$$

bajo el producto interno definido en (2.2.11). Para una descripción detallada de estas relaciones y la correspondiente representación mimética de los productos internos y operadores ver [1].

Usando X_n^s y los conjuntos

$$\Psi_n^{CV} = \{ \Psi_{i+1/2} : \Psi_{i+1/2} = \Psi(x_{i+1/2}), x_{i+1/2} \in X_n^p \} \quad (2.2.13)$$

$$\Psi_n^{CE} = \{ \psi_i : \psi_i = \psi(x_i), x_i \in X_n^l \} \quad (2.2.14)$$

Para un operador de incremento dado E_j definido por

$$E_j \phi_k = \phi_{k+j} \quad (2.2.15)$$

podemos definir el siguiente operador de diferencia

$$\delta_j = E_j - E_{-j} \quad (2.2.16)$$

Haciendo uso de (2.2.7) y pensando en Condiciones de Contorno de Dirichlet podemos definir el operador D con

$$D : \Psi_n^{CV} \mapsto \Psi_n^{CE} \quad (2.2.17)$$

en la forma

$$D_k \Psi = \frac{\delta_{1/2} \Psi_k}{\delta_{1/2} x_k}, 0 < k < N \quad (2.2.18)$$

a la vez podemos definir G tal que

$$G: \Psi_n^{CE} \mapsto \Psi_n^{CV} \quad (2.2.19)$$

con

$$G_{k+1/2} \Psi = \frac{\delta_{1/2} \Psi_{k+1/2}}{\delta_{1/2} x_{k+1/2}}, 1 \leq k \leq N-2 \quad (2.2.20.a)$$

y

$$G_{1/2} \Psi = \frac{\Psi_1}{\delta_{1/2} x_{1/2}} \quad G_{N-1/2} \Psi = -\frac{\Psi_{N-1}}{\delta_{1/2} x_{N-1/2}} \quad (2.2.20.b)$$

si llamamos D y G las representaciones matriciales de los operadores **div** y **grad** respectivamente puede verse que

$$G = [g_{ij}]_{N \times (N-1)} = [d_{ji}]_{(N-1) \times N} = -D^* \quad (2.2.21)$$

Como se esperaba de (2.2.12)

Si queremos llevar los resultados anteriores a R^n , podemos hacerlo utilizando una extensión de ellos a rejillas de producto tensorial y utilizando métodos de mapeo cuando sea necesario, veremos a continuación como llevar a cabo lo primero, los métodos de mapeo son herramientas hermosas pero no serán discutidos aquí.

3. Representación Discreta de Operadores Diferenciales en dimensiones superiores usando rejillas de producto tensorial

Definiremos una rejilla de producto tensorial de dimensión “N” representada por X_n^N como una rejilla que puede ser obtenida como el producto cartesiano de “N” rejillas 1-dimensionales $1 \leq k \leq N$, esto puede escribirse en la forma

$$X_{n_N}^N = \times_{1 \leq k \leq N} X_{n_k, k} \quad (2.3.1)$$

Ahora introduciremos las funciones de índice de la forma

$$i_k^J = i_k(J) \quad 1 \leq k \leq N, 1 \leq J \leq n_N \quad (2.3.2)$$

Donde

$$n_N = \prod_{1 \leq k \leq N} n_k \quad (2.3.3)$$

si las seleccionamos de tal modo que satisfagan

$$i_1(J) = 1 + \text{mod} \left(\text{floor} \left(\frac{J-1}{n_2} \right), n_1 \right) \quad (2.3.4.a)$$

$$i_2(J) = 1 + \text{mod}(J-1, n_2) \quad (2.3.4.b)$$

$$i_k(J) = 1 + \text{mod} \left(\text{floor} \left(\frac{J-1}{\prod_{1 \leq j \leq k-1} n_j} \right), n_k \right), 3 \leq k \leq N \quad (2.3.4.c)$$

Nuestra elección de las funciones de índice se hizo en base al criterio de numeración de nodos utilizado, en este trabajo se utilizó uno bastante estándar.

Si queremos aproximar una función Ψ tal que

$$\Psi : R^N \supset \Omega \mapsto R \quad (2.3.5)$$

esto puede hacerse utilizando los valores

$$\Psi_{n_N}^N = \{ \Psi_i : \Psi_i = \Psi(x^i), x^i \in X_{n_N}^N \subset \Omega \} \quad (2.3.6)$$

y considerando

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{N-1}, x_N) \in \Omega \subset R^N \quad (2.3.7)$$

de la siguiente forma

Definamos un polinomio

$$P[\Psi](x) = \sum_{1 \leq J \leq n_N} \Psi_J \otimes_{k=N}^3 \rho_{n_k}^{i_k^J}(x_k) \otimes \rho_{n_1}^{i_1^J}(x_1) \otimes \rho_{n_2}^{i_2^J}(x_2) \quad (2.3.8)$$

en la expresión anterior el producto \otimes puede interpretarse como

$$\otimes_{k=m}^n f_k(x_k) = \prod_{k=m}^n f_k(x_k) \quad (2.3.9)$$

el polinomio (2.2.8) satisfará

$$P[\Psi](x^i) = \Psi_i, x^i \in X_{n_N}^N \tag{2.3.10}$$

Si ahora tenemos un operador diferencial bien definido en

$$F = (R, G, +, \cdot) \tag{2.3.11.a}$$

$$G = \{g : (g : R \supset \Omega_1 \mapsto R)\} \tag{2.3.11.b}$$

luego puede verse que

$$\begin{aligned} D_{x_i} \bigotimes_{k=m}^n f_k(x_k) &= \prod_{k=m}^{i-1} f_k(x_k) D_{x_i} f_i(x_i) \prod_{k=i+1}^n f_k(x_k) = \\ &= \bigotimes_{k=m}^{i-1} f_k(x_k) \otimes D_{x_i} f_i(x_i) \bigotimes_{k=i+1}^n f_k(x_k) \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Considerando D como la representación matricial de un operador diferencial dado y al mismo tiempo considerando que aplicar D_{x_i} a $P[\Psi](x)$ sobre el conjunto de líneas.

$$x^l = \{x : (x_i \in X_{n_i,i}, x_j = x_j^f \in X_{n_j,j}, i \neq j)\} \tag{2.3.13}$$

donde los x_j están fijos mientras x_i varía en $X_{n_i,i}$, puede interpretarse, con el respectivo criterio de numeración, en la forma

$$D_{x_i} P[\Psi](x^l) = \left[\bigotimes_{k=N}^{i-1} I_k \otimes D_i \bigotimes_{k=i+1}^3 I_k \otimes I_1 \otimes I_2 \right] \Psi_{n_N}^N \tag{2.3.14.a}$$

$$D_{x_1} P[\Psi](x^l) = \left[\bigotimes_{k=N}^3 I_k \otimes D_1 \otimes I_2 \right] \Psi_{n_N}^N \tag{2.3.14.b}$$

$$D_{x_2} P[\Psi](x^l) = \left[\bigotimes_{k=N}^3 I_k \otimes I_1 \otimes D_2 \right] \Psi_{n_N}^N \tag{2.3.14.c}$$

en la última expresión los entes I_k pueden ser vistos como matrices identidad de $k \times k$ y se interpretan como la representación de los multiplicadores $\ell_{n_k}^k(x_k)$ en $\Psi_{n_N}^N$, como consecuencia \otimes puede interpretarse como producto tensorial de Kronecker. Este método puede aplicarse a las representaciones obtenidas en (2.2) considerando (2.3.8) construido con un método de de interpolación por partes de 3-er orden.

4. Discretización de Operadores Diferenciales Espaciales y Valores en la Frontera

Consideremos una función $\psi : R^N \supset \Omega \mapsto R$ que satisface

$$\nabla \circ (\kappa \nabla \psi) + \lambda \psi = f(x, \psi) \quad x \in \Omega \subset R^N \quad (2.4.1.a)$$

$$B(\psi) = \psi_b, x \in \partial\Omega \quad (2.4.1.b)$$

donde

$$\kappa : R^N \mapsto R^{N \times N} \quad (2.4.1.c)$$

ahora consideremos una rejilla escalonada de producto tensorial *N-dimensional* $X_{n_N}^{N,s}$ que sigue la definición (2.3.1) donde cada rejilla *1-dimensional* es escalonada, los operadores discretos D y G que preservarán las condiciones establecidas en (2.2) y cuya representación general en rejillas escalonadas *N-dimensionales* es como sigue

$$D : \Psi_{n_N}^{N,CV} \mapsto \Psi_{n_N}^{N,CE} \quad (2.4.2.a)$$

$$G : \Psi_{n_N}^{N,CE} \mapsto \Psi_{n_N}^{N,CV} \quad (2.4.2.b)$$

Los conjuntos $\Psi_{n_N}^{N,CE}$ y $\Psi_{n_N}^{N,CV}$, para un determinado par de funciones $\psi : R^N \supset \Omega \mapsto R$ y $\Psi : R^N \supset \Omega \mapsto R^N$, están definidos por

$$\Psi_{n_N}^{N,CE} = \left\{ \Psi_J : \Psi_J = \psi(x^J) x^J \in X_{n_N}^{N,I} \right\} \quad (2.4.3.a)$$

$$\Psi_{n_N}^{N,CV} = \left\{ \Psi_{J+1/2} : \Psi_{J+1/2} = \psi(x^{J+1/2}) x^J \in X_{n_N}^{N,p} \right\} \quad (2.4.3.b)$$

De (2.4.2) podemos ver que el sistema (2.4.1) puede representarse como

$$M\Psi = F(x, \Psi) \quad (2.4.6)$$

donde

$$M \equiv DKG + \Lambda \quad (2.4.7)$$

y

$$F = f + \psi_b \quad (2.4.8)$$

M y F son entes algebraicos tales que

$$M = [m_{ij}]_{n_N \times n_N} \in R^{n_N \times n_N} \quad \text{and} \quad F = [f_{ij}]_{n_N \times 1} \in R^{n_N} \quad (2.4.9)$$

Para una función dada f consideraremos un error de aproximación debido a la discretización de (2.4.1) medido por la norma- L^2 en la forma

$$e_h = \left(\int_{\Omega} (f(x, \psi) - M_h \psi)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.10)$$

aquí M_h denota la representación matricial (2.4.7) en una rejilla escalonada N -dimensional de tamaño h .

Siguiendo un análisis similar al presentado en (2.1)

podemos ver que nuestra discretización deberá presentar una aproximación de segundo orden de (2.4.1), esto conduce a que bajo la norma definida en (2.4.10) tendríamos que esperar segundo orden de convergencia, esto puede confirmarse con un simple experimento

Tomemos

$$\psi(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (2.4.11)$$

$$f(x, y, \psi) = -\pi^2 \psi \quad (2.4.12)$$

$$\kappa(x, y) = I \quad \text{y} \quad \lambda(x, y) = \pi^2 \quad (2.4.13)$$

considerando $\Omega =]0,1[\times]0,1[$

En este y todos los experimentos restantes consideraremos rejillas de producto tensorial que satisfagan las siguientes condiciones

$$X_{n_N}^{N,s} = \times_{1 \leq k \leq N} X_{n_k}^s \quad (2.4.14.a)$$

$$X_{n_k}^I = \{x_i : x_i = x_0 + ih, 0 < i < N\} \quad (2.4.14.b)$$

$$X_{n_k}^P = \{x_{i+1/2} : x_{i+1/2} = x_0 + (i + 1/2)h, 0 \leq i < N\} \quad (2.4.14.c)$$

$$X_{n_k}^F = \{x_0, x_0 + n_k h\} \quad (2.4.14.d)$$

Luego de construir ciertas discretizaciones de (2.4.1) para varios valores de "h" obtenemos los siguientes resultados

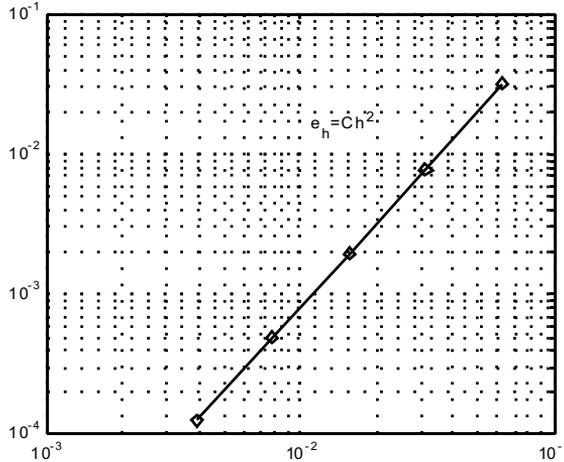


Fig 2.4.1 Convergence rate for data in (2.4.11-13)

MODELO DEPENDIENTE DEL TIEMPO

Si revisamos y reescribimos la ecuación (1.5-7) en la forma

$$\Psi_{tt} = [\nabla \circ [k\nabla]]\Psi + \Lambda\Psi, (x, t) \in \Omega \times R_0^+ \quad (3.1)$$

consideremos ahora las funciones discretas definidas en la forma

$$\Psi_{n_N, t}^{N, s} = \{ \Psi^{J, t} : \Psi^{J, t} = \Psi(x^J, t) x^J \in X_{n_N}^{N, s} \subseteq \Omega, t = t_f \in R_0^+ \} \quad (3.2)$$

En la relación anterior estamos considerando que para vectores específicos pertenecientes a la rejilla \$X_{n_N}^{N, s}\$ los valores de las funciones discretas varían también con respecto a \$x^J\$ que toma valores en un intervalo prescrito en \$R_0^+\$, bajo esta consideración podemos ver que el lado derecho de (3.1) combinado con las condiciones (1.7) puede ser discretizado para un determinado valor \$h\$ en la forma siguiente

$$[[\nabla \circ [k\nabla]] + \Lambda] \approx M_h \equiv [DKG + \Lambda] \quad (3.3)$$

Utilizando la expresión anterior podemos ahora expresar (3.1) en la forma

$$\Psi''_{tt} = M_h \Psi^{J,t} \tag{3.4}$$

Como mencionamos en la introducción podemos usar la función $\Phi^{J,t}$ relacionada con $\Psi^{J,t}$ en la forma ahí mostrada, esto lleva a que (3.4) se reescriba como

$$\begin{bmatrix} \Psi^{J,t} \\ \Phi^{J,t} \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} 0 & I \\ M_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^{J,t} \\ \Phi^{J,t} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Como dijimos en secciones anteriores podemos resolver (3.5) como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en el tiempo sujeto a las condiciones iniciales

$$\begin{bmatrix} \Psi^{J,0} \\ \Phi^{J,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_0(x^J) \\ \Psi_1(x^J) \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Existen varias maneras de hacerlo, una de ellas es usar un esquema adaptativo de integración temporal como Runge Kutta de 4-to orden, los métodos de Runge Kutta son bien conocidos en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y discusiones acerca de estabilidad y temas relacionados pueden encontrarse en [2]. En nuestro estudio hemos utilizado métodos como el mencionado anteriormente, pero concluyendo esta sección discutiremos la estabilidad de nuestro método desde una perspectiva espectral.

Para analizar la estabilidad espectral de nuestro método consideraremos el sistema (3.5) y procederemos a estimar una solución explícita en función del tiempo en la siguiente forma

Expresemos (3.5) como

$$Y_t = N_h Y \tag{3.7.a}$$

$$Y(0) = Y_0 \tag{3.7.b}$$

donde

$$Y = \begin{bmatrix} \Psi^{J,t} \\ \Phi^{J,t} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad N_h = \begin{bmatrix} 0 & I \\ M_h & 0 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Es importante notar que ahora consideramos Y como una función que sólo varía en

el tiempo, de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias tenemos que (3.7) puede resolverse en la forma

$$Y(t) = e^{N_h t} Y_0 \quad (3.9)$$

utilizando (3.9) podemos ver que si estamos interesados en el valor correspondiente a Y para un valor específico $t = t_j$ relativamente lejano a $t = 0$ o en una sucesión de valores $\{t_n\}$ correspondiente a la secuencia de números $\{t_n\}$ que están distribuidos arbitrariamente en un intervalo temporal, este procedimiento puede ser de mucha utilidad para estimar la estabilidad numérica del método

Podemos ver que la forma matricial $M = [m_{ij}]_{n \times n}$ puede expresarse en la forma

$$MV = V\Gamma \quad (3.10)$$

donde $V = [v_{ij}]_{n \times n}$ es una matriz densa y $\Gamma = [\gamma_{ij}]_{n \times n}$ es diagonal, puede verse que si V es invertible

$$e^{tM} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k M^k}{k!} = V e^{t\Gamma} V^{-1} \quad (3.11)$$

Aquí consideramos que cada columna $V^i = [v_{ij}]_{n \times 1}$ de V tiene la propiedad

$$MV^i = \gamma_{ii} V^i \quad (3.12)$$

En otras palabras la i -ésima columna de V es un eigenvector de M correspondiente al eigenvalor γ_i que es la ii -entrada de la matriz Γ .

De (3.11) obtenemos que M si satisface (3.10) luego

$$Y(t) = V e^{t\Gamma} V^{-1} Y_0 \quad (3.13)$$

Esto significa que necesitamos encontrar el espectro de M que es el conjunto de números

$$S(M) = \{ \gamma_i : |\gamma_i I - M| = 0, 1 \leq i \leq n \} \quad (3.14)$$

Y la correspondiente base espectral que sería

$$S_B(M) = \{ v_i \in R^n : Mv_i = \gamma_i v_i, 0 \leq i \leq n \} \quad (3.15)$$

Existen varios métodos para llevar a cabo esta operación pero antes de utilizar cualquiera de ellos vale la pena considerar lo siguiente.

Si queremos resolver el problema de eigenvalores

$$N_h V = \gamma V \tag{3.16}$$

puede verse que (3.16) puede reescribirse como

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ M_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

podemos comparar ambos lados de esta ecuación obteniendo

$$v = \gamma u \tag{3.18.a}$$

$$M_h u = \gamma v \tag{3.18.b}$$

sustituyendo (3.18.a) en (3.18.b) obtenemos

$$M_h u = \gamma (\gamma u) = \gamma^2 u = \alpha u \tag{3.19}$$

Lo cual nos permite resolver (3.16) con la mitad del esfuerzo computacional en especial cuando N_h es considerablemente grande, en este trabajo nos concentraremos en el caso en que es simétrico dado que será cuando M_h será simétrico también, podemos ahora resolver (3.19) y para cada eigenvalor α_i con eigenvector correspondiente u_i podremos calcular los eigenvalores

$$\gamma_{i,i+1} = \pm \sqrt{\alpha_i} \quad i = 1, 3, 5, \dots, n/2 \tag{3.20}$$

y eigenvectores

$$V_{i,i+1} = \begin{bmatrix} u_i \\ \gamma_{i,i+1} u_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 3, 5, \dots, n/2 \tag{3.21}$$

debido a las propiedades de M_h y la definición de $\gamma_{i,i+1}$ tendremos que cada par de estos valores satisfará

$$\gamma_{i,i+1} \in \mathfrak{I} \tag{3.22}$$

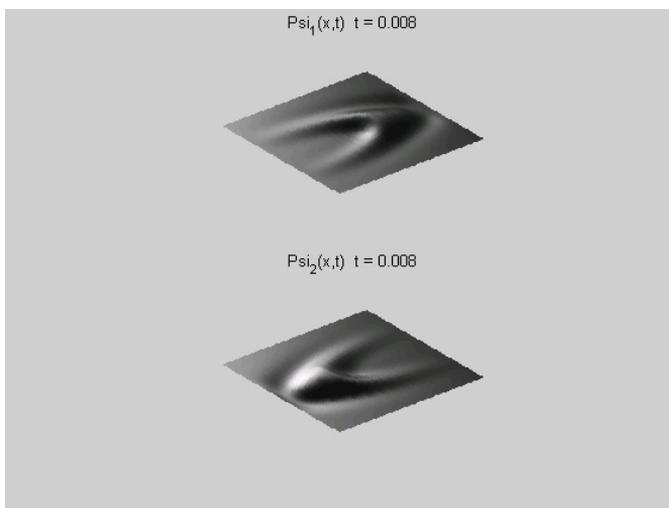
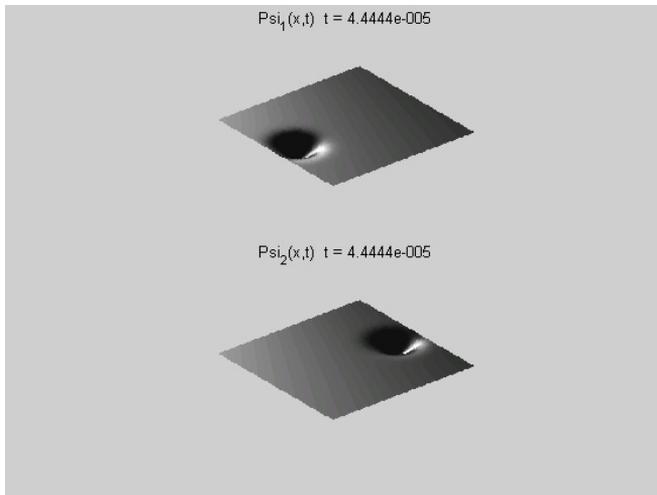
de donde se desprende que

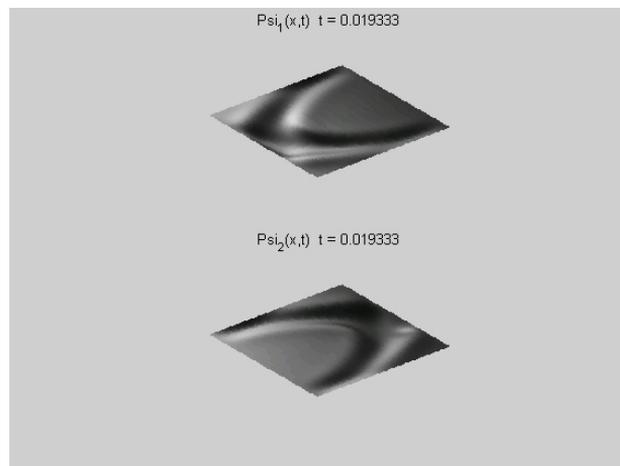
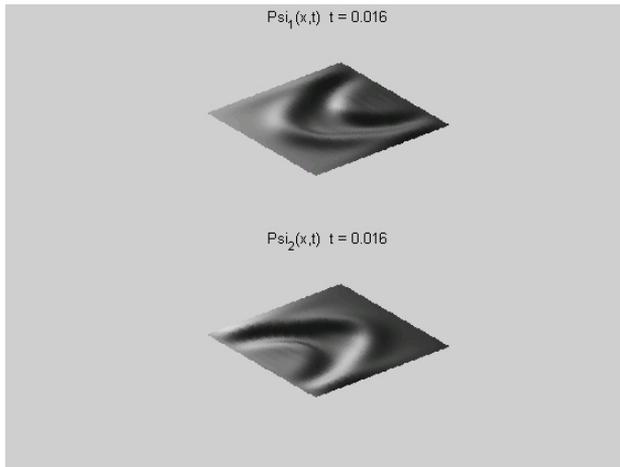
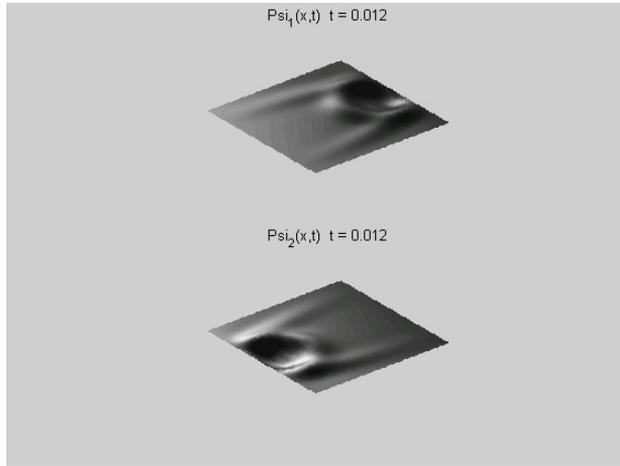
$$\psi^1(x,t) = 0, x \in \partial\Omega, t \geq 0$$

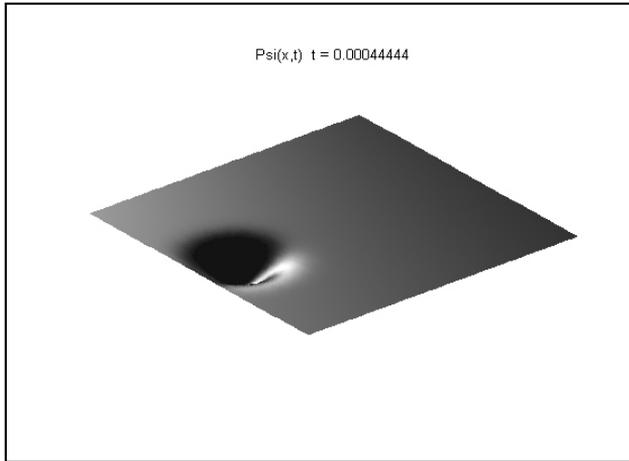
$$\psi^1(x,0) = -\frac{1}{10} \alpha(x,y) e^{-100((x-1.5)^2 + (y-.5)^2)} \quad \psi_t^1(x,0) = 0$$

$$\psi^2(x,0) = -\frac{1}{10} \alpha(x,y) e^{-100((x-.85)^2 + (y-.5)^2)} \quad \psi_t^2(x,0) = 0 \quad x \in \Omega \text{ con}$$

$$\alpha(x,y) = 0, (x,y) \in \partial\Omega$$







2. Onda en un Medio Heterogéneo No-Isotrópico Caso 1

$$\psi : (\mathbb{R}^2 \supset \Omega) \times \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}, \Omega =]0,1[\times]0,1[$$

$$R_d = [.5, .75] \times [.25, .75]$$

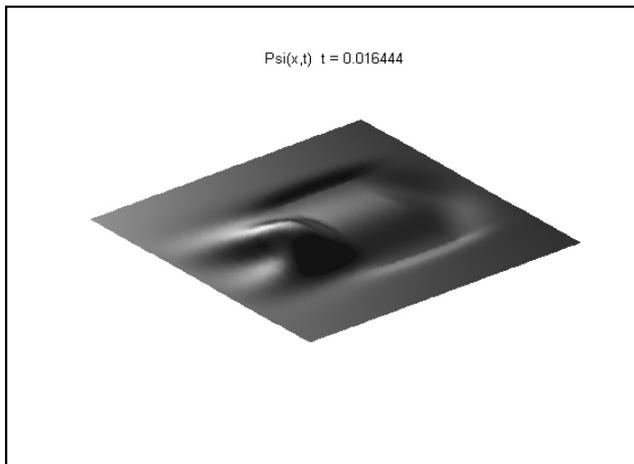
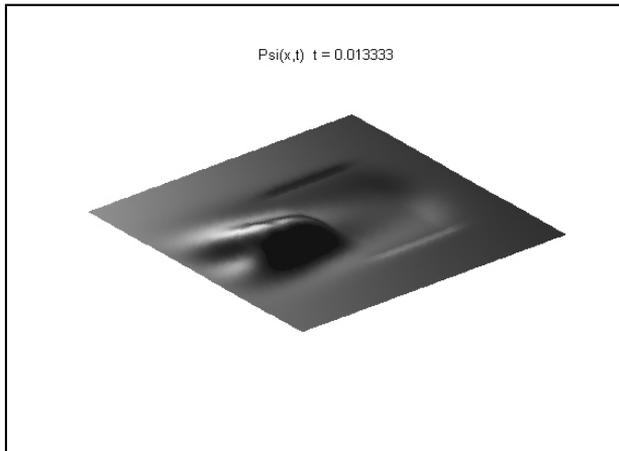
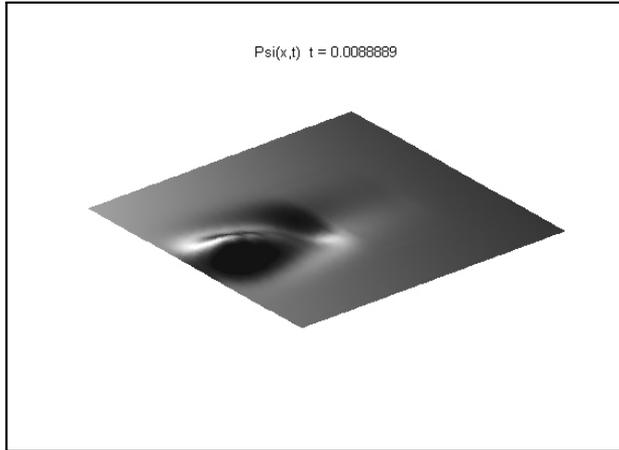
$$\Lambda = 0$$

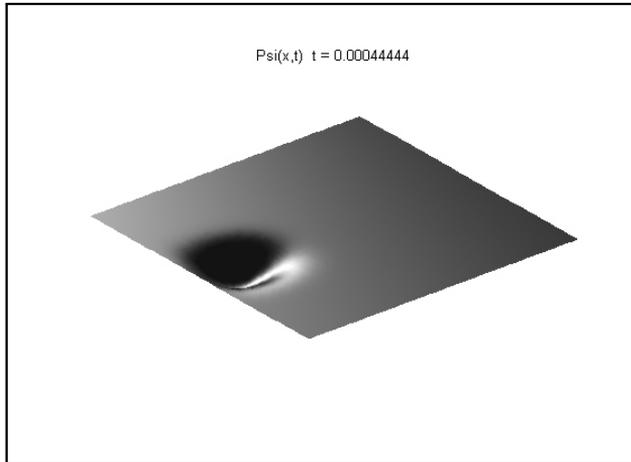
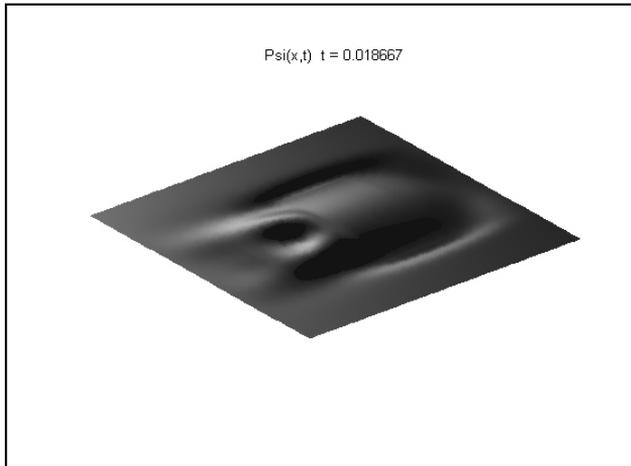
$$\kappa = \lambda \begin{bmatrix} 10^3 & \\ & 10^2 \end{bmatrix} \quad \lambda = \begin{cases} 10, & x \in R_d \\ 1, & x \in \Omega - R_d \end{cases}$$

$$\psi(x, t) = 0, x \in \partial\Omega, t \geq 0$$

$$\psi(x, 0) = \frac{-1}{10} \alpha(x, y) e^{-100((x-.15)^2 + (y-.5)^2)} \quad \psi_t(x, 0) = 0 \quad x \in \Omega \quad \text{con}$$

$$\alpha(x, y) = 0, (x, y) \in \partial\Omega$$





3. Onda en un Medio Heterogéneo No-Isotrópico Caso 2

$$\psi : (\mathbb{R}^2 \supset \Omega) \times \mathbb{R}_0^+ \mapsto \mathbb{R}, \Omega =]0,1[\times]0,1[$$

$$R_d = [5,75] \times [25,75]$$

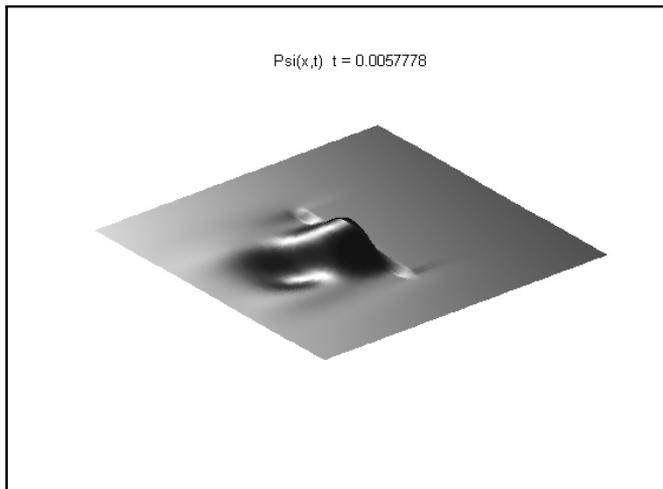
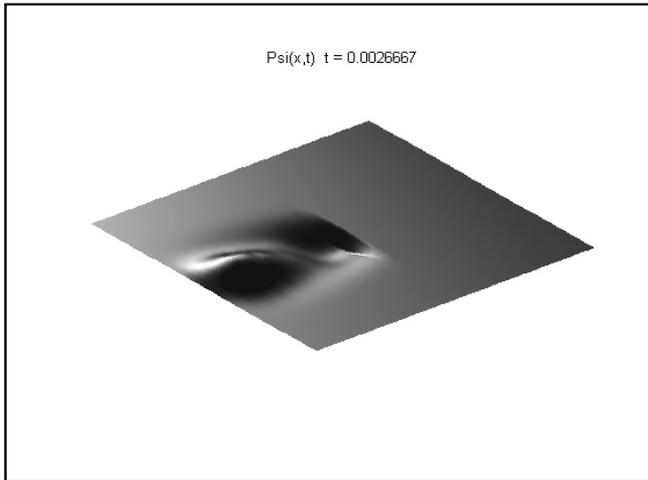
$$\Lambda = 0$$

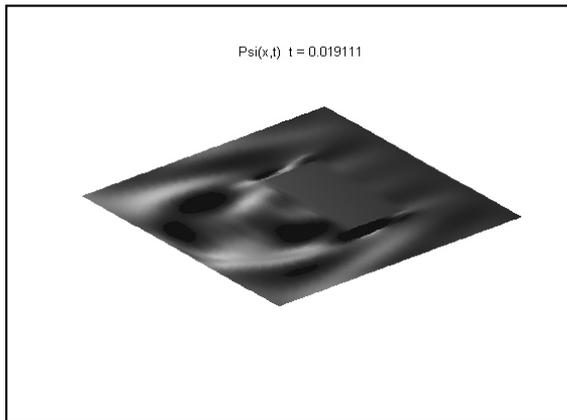
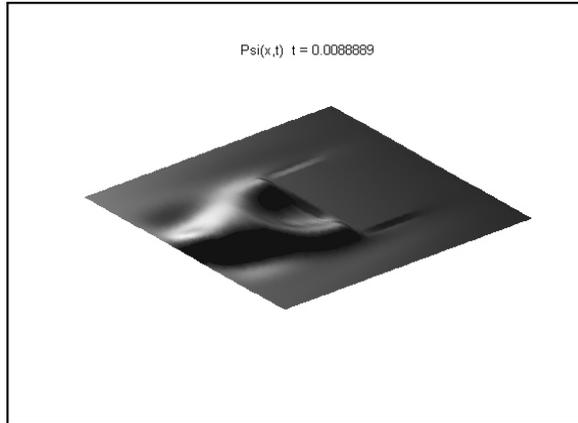
$$\kappa = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, x \in R_d \quad \kappa = \begin{bmatrix} 10^4 & \\ & 10^3 \end{bmatrix}, x \in \Omega - R_d$$

$$\psi(x, t) = 0, x \in \partial\Omega, t \geq 0$$

$$\psi(x, 0) = \frac{-1}{10} \alpha(x, y) e^{-100((x-.15)^2 + (y-.5)^2)} \quad \psi_t(x, 0) = 0 \quad x \in \Omega \quad \text{con}$$

$$\alpha(x, y) = 0, (x, y) \in \partial\Omega$$





4. Razones de Convergencia

Las razones de convergencia de los experimentos anteriores con respecto a un tamaño de malla h para un t fijo son mostrados en la siguiente tabla, las razones son calculadas bajo la *norma- L^2* .

Table 4.3 Razones de Convergencia

Número de Experimento	Razón de Convergencia
4.1	$p_1 = 1.88655438523349$
4.1	$p_2 = 1.88655504596682$
4.1	$p = 1.52397448144873$
4.1	$p = 1.69461294711186$

CONCLUSIONES

El método aquí presentado puede ser una simple pero muy útil herramienta para el análisis de movimiento ondulatorio en medios heterogéneos no-isotrópicos con un orden de precisión que dependerá de la aproximación de las derivadas espaciales, la precisión puede ser incrementada siguiendo las ideas aquí presentadas.

BIBLIOGRAFÍA

J. Hyman, M. Shashkov and S. Steinberg, The Numerical Solution of Diffusion Problems in Strongly Heterogeneous Non-isotropic Materials, (1996).
 L. N. Trefethen, Differential Equations Hand Book, (1994).
 S. Steinberg, A Discrete Calculus with Applications to High-Order Discretizations to Boundary-Value Problems. (Marzo 17, 2004).