



ISSN 1992-6510
e-ISSN 2520-9299

63

REALIDAD Y REFLEXIÓN ES UNA PUBLICACIÓN PERIÓDICA DE CARÁCTER SEMESTRAL DE LA UNIVERSIDAD FRANCISCO GAVIDIA
AÑO 26, n.º 63, ENERO-JUNIO 2026. SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTROAMÉRICA

REALITY AND REFLECTION IS A BIENNIAL PERIODICAL PUBLICATION OF THE FRANCISCO GAVIDIA UNIVERSITY
YEAR 26, n.º 63, JANUARY-JUNE 2026. SAN SALVADOR, EL SALVADOR, CENTRAL AMERICA

Desarrollo de una familia iterativa óptima de orden cuatro para resolver ecuaciones no lineales¹

Development of an optimal fourth-order iterative family for solving nonlinear equations

Andhy Moisés Díaz Rivera

Licenciatura en Matemática, Universidad de El Salvador, El Salvador

Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación,

Universidad Internacional de la Rioja, España

Docente universitario, Facultad de Ingeniería y Arquitectura, Universidad de Oriente, El Salvador

andhy.diaz@univo.edu.sv

<https://orcid.org/0009-0004-9661-6113>

Fecha de recepción: 12 de enero de 2026

Fecha de aprobación: 17 de marzo de 2026

DOI:



¹ El autor declara que se ha usado la herramienta ChatGPT como apoyo en la verificación de la redacción del texto. La formulación matemática, las pruebas, resultados numéricos y las conclusiones son responsabilidad del autor.

RESUMEN

Este artículo se centra en el problema de la resolución de ecuaciones no lineales mediante métodos iterativos. El propósito principal consiste en diseñar y analizar las propiedades de convergencia y estabilidad de una nueva familia uniparamétrica de métodos iterativos. Esta nueva familia se construye a partir de la introducción de un parámetro complejo y de la combinación lineal de dos métodos iterativos existentes. La metodología integra la deducción teórica de los resultados sobre convergencia y dinámica con la implementación computacional del nuevo esquema. Mediante el análisis de convergencia de la nueva familia, se verifica que cada uno de sus miembros posee orden de convergencia cuatro para cualquier valor del parámetro. Se utilizan herramientas gráficas, como superficies de estabilidad, planos de parámetros y planos dinámicos, que permiten establecer regiones del plano imaginario en las que cada método se comporta de forma estable o inestable. Las pruebas numéricas realizadas en diversas ecuaciones no lineales verifican los resultados del análisis de convergencia y estabilidad. Las conclusiones destacan la eficiencia y robustez de la nueva familia, incluso al modificar las condiciones iniciales, al compararla con otros métodos iterativos clásicos de orden cuatro. Los resultados obtenidos tienen implicaciones en la resolución eficiente de modelos científicos y de ingeniería.

Palabras clave: análisis dinámico, ecuación no lineal, eficiencia, estabilidad, orden de convergencia.

ABSTRACT

This article focuses on the problem of solving nonlinear equations using iterative methods. The main objective is to design and analyze the convergence and stability properties of a new uniparametric family of iterative methods. This new family is constructed by introducing a complex parameter and combining two existing iterative methods linearly. The methodology integrates the theoretical derivation of results on convergence and dynamics with the computational implementation of the new scheme. Through convergence analysis of the new family, it is verified that each of its members has a convergence order of four for any value of the parameter. Graphical tools, such as stability surfaces, parameter planes, and dynamic planes, are used to identify regions of the imaginary plane where each method behaves stably or unstably. Numerical tests performed on various nonlinear equations verify the results of the convergence and stability analysis. The conclusions highlight the efficiency and robustness of the new family, even when initial conditions are modified, when compared to other classical fourth-order iterative methods. The results obtained have implications for the efficient solution of scientific and engineering models.

Keywords: *dynamic analysis, nonlinear equation, efficiency, stability, convergence order.*

Introducción

La resolución de ecuaciones no lineales mediante métodos numéricos constituye un tópico ampliamente abordado en el campo del análisis numérico, como se evidencia en las publicaciones de Traub (1964), Ortega y Rheinboldt (1970), Moscoso-Martínez *et al.* (2024), Petković *et al.* (2013), Cordero *et al.* (2024), entre otras. Una gran parte de los problemas de las ciencias y la ingeniería se representa mediante ecuaciones no lineales. Desafortunadamente, debido a la estructura matemática de estas ecuaciones, resulta complicado implementar técnicas analíticas para encontrar una solución exacta; ante esta limitante, se requiere el uso de métodos iterativos.

Un método iterativo para resolver una ecuación no lineal $f(x) = 0$, donde $f: V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y V es un intervalo abierto, consiste en la obtención de una sucesión (x_k) a partir de una estimación inicial x_0 y dicha sucesión debe converger a la solución de la ecuación no lineal. Uno de los métodos iterativos más utilizados por su sencillez y eficacia es el método de Newton definido por:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

El orden de convergencia de un método iterativo hace referencia a la rapidez con la cual el método se aproxima a la solución. El método de Newton tiene orden de convergencia dos, inferior en comparación con otros métodos, como los diseñados en Cordero *et al.* (2021) y Zein (2024), los cuales poseen orden de convergencia tres y cuatro, respectivamente.

Un aspecto importante en la construcción de métodos iterativos es la conjetura de Kung-Traub (1974), la cual relaciona el orden de convergencia con el número de evaluaciones funcionales. En la literatura existen métodos iterativos con alto orden de convergencia que, sin embargo, poseen un número de evaluaciones funcionales tal que no cumplen con la conjetura de Kung-Traub y conllevan un mayor coste computacional (Hu y Fang, 2010; Thota y Shanmugasundaram, 2022).

Por este motivo, en el presente trabajo se propone una nueva familia iterativa óptima de orden cuatro, la cual está en función de un parámetro complejo α . Debido a que la familia diseñada depende de un parámetro α , es posible obtener una infinidad de métodos que presentan un comportamiento diferente para cada valor de α ; por ello, resulta necesario realizar un análisis de estabilidad mediante el uso de herramientas de dinámica compleja, con el fin de determinar los valores de α que muestran propiedades adecuadas de estabilidad. Finalmente, a partir de los hallazgos obtenidos mediante la dinámica compleja, es posible realizar diversas pruebas numéricas para contrastar los resultados teóricos.

Metodología

La metodología de investigación implementada en este trabajo es de tipo teórico y aplicado. Con el propósito de construir una nueva familia iterativa, se considerará una combinación de dos métodos iterativos existentes. En la fase teórica se emplearán definiciones y resultados del análisis numérico para determinar el orden de convergencia de la nueva familia. Asimismo, se impondrán condiciones específicas sobre el parámetro asociado que permitan simplificar la expresión general del método.

El orden de convergencia teórico será comparado con el orden de convergencia computacional aproximado (ACOC, por sus siglas en inglés), establecido en Cordero y Torregrosa (2007). Para analizar el comportamiento dinámico del método, se considerarán diferentes condiciones iniciales. A partir de ellas, se construirán las respectivas órbitas y se analizarán sus estados finales. Este análisis permitirá generar las cuencas de atracción, las cuales ilustran las regiones del plano donde la familia presenta mayor estabilidad. El criterio de visualización se basará en una tolerancia predefinida del error y en un número máximo de iteraciones necesarias para alcanzarla. Además, se examinarán los efectos del parámetro en la estabilidad y velocidad de convergencia del método, así como la interacción con los distintos puntos fijos. Para realizar las gráficas del análisis dinámico, se emplearán tanto MATLAB como Wolfram Mathematica.

La investigación de tipo aplicado se empleará para corroborar los resultados teóricos. Para ello, se aplicará el esquema a diversas ecuaciones no lineales de prueba. Los experimentos computacionales fueron realizados en un equipo con procesador Intel(R) Core(TM) i5-1035G1 CPU @ 1.00GHz 1.19 GHz, memoria RAM de 8 GB y sistema operativo Windows 10. Se utilizó MATLAB R2022b para la implementación de los métodos iterativos y la generación de gráficos dinámicos.

Resultados

Construcción de la nueva familia iterativa

Se considera el método iterativo desarrollado en Abu Ghalioun y Zein (2025), dado por:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, & k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \frac{f(x_k)f(y_k)}{f^2(x_k) - f^2(y_k) - 2f(x_k)f(y_k)}. \end{cases}$$

Además, en Moscoso Martínez *et al.* (2024) se construye un método iterativo que tiene por expresión:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, & k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = y_k - \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)} + 2 \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right)^2 \right) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \end{cases}$$

Ambos métodos tienen como primer iterado y_k el método de Newton. Para crear una nueva familia iterativa se introduce un parámetro $\alpha \in \mathbb{C}$ y se considera una combinación lineal del segundo paso de ambos métodos, definida por:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, & k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = y_k - \left(\frac{1-\alpha}{2} \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)} + 2 \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right)^2 \right) + \frac{1+\alpha}{2} \left(\frac{f(x_k)f(y_k)}{f^2(x_k) - f^2(y_k) - 2f(x_k)f(y_k)} \right) \right) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \end{cases}$$

Es importante observar que si se toma $\alpha = 1$, el método que se obtiene es el de Abu Ghalioun y Zein (2025), mientras que con $\alpha = -1$ se tiene el método de Moscoso Martínez *et al.* (2024). Por lo tanto, esta combinación permite recuperar los métodos base, como también permite generar métodos distintos para $\alpha \neq -1$ y 1 . La familia diseñada será denominada como MMA(α) en referencia a los autores de ambos métodos.

Análisis de convergencia del nuevo esquema iterativo

A continuación, se presentan los resultados del análisis de convergencia de la familia MMA(α) con el objetivo de establecer el orden de convergencia.

Teorema 1. Sea $f: V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en un intervalo abierto V , y sea ζ una raíz de $f(x)$ tal que f' es continua en ζ y $f'(\zeta) \neq 0$. Entonces, si x_0 es una estimación inicial suficientemente cercana a ζ los miembros de la familia convergen a ζ con un orden de convergencia cuatro siendo la ecuación del error:

$$e_{k+1} = \left(-\frac{5}{2}(-1 + \alpha)A_2^3 - A_2A_3 \right) e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5),$$

Donde $e_k = x_k - \zeta$ y $A_j = \frac{1}{j!} \frac{f^{(j)}(\zeta)}{f'(\zeta)}$, para $j = 2, 3, \dots$

Demostración. Primero, se obtiene el desarrollo en serie de Taylor para $f(x_k)$ alrededor de la raíz ζ :

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f(\zeta) + f'(\zeta)e_k + \frac{f''(\zeta)}{2!}e_k^2 + \frac{f'''(\zeta)}{3!}e_k^3 + \frac{f^{(4)}(\zeta)}{4!}e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5) \\ &= f'(\zeta) \left(e_k + \frac{1}{2!} \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} e_k^2 + \frac{1}{3!} \frac{f'''(\zeta)}{f'(\zeta)} e_k^3 + \frac{1}{4!} \frac{f^{(4)}(\zeta)}{f'(\zeta)} e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5) \right) \\ &= f'(\zeta) (e_k + A_2 e_k^2 + A_3 e_k^3 + A_4 e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5)), \end{aligned}$$

Ahora el desarrollo para la derivada $f'(x_k)$ es:

$$\begin{aligned} f'(x_k) &= f'(\zeta) + f''(\zeta)e_k + \frac{f'''(\zeta)}{2!}e_k^2 + \frac{f^{(4)}(\zeta)}{3!}e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4) \\ &= f'(\zeta) \left(1 + \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} e_k + \frac{1}{2!} \frac{f'''(\zeta)}{f'(\zeta)} e_k^2 + \frac{1}{3!} \frac{f^{(4)}(\zeta)}{f'(\zeta)} e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4) \right) \\ &= f'(\zeta) (1 + 2A_2 e_k + 3A_3 e_k^2 + 4A_4 e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4)). \end{aligned}$$

Dividiendo el desarrollo de $f(x_k)$ con el de $f'(x_k)$ la expresión resultante es:

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = e_k - A_2 e_k^2 + (2A_2^2 - 2A_3^2) e_k^3 + (-4A_2^3 + 7A_2 A_3 - 3A_4) e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5).$$

Lo que implica que el primer paso de la familia viene dado por:

$$y_k - \zeta = A_2 e_k^2 + (-2A_2^2 + 2A_3) e_k^3 + (4A_2^3 - 7A_2 A_3 + 3A_4) e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5).$$

Con la expresión de y_k es posible obtener el desarrollo:

$$f(y_k) = f'(\zeta) (A_2 e_k^2 + 2(-A_2^2 + A_3) e_k^3 + (5A_2^3 - 7A_2 A_3 + 3A_4) e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5)).$$

Ahora, al dividir el desarrollo de $f(y_k)$ entre el de $f(x_k)$, se tiene:

$$\frac{f(y_k)}{f(x_k)} = A_2 e_k + (-3A_2^2 + 2A_3) e_k^2 + (8A_2^3 - 10A_2 A_3 + 3A_4) e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4).$$

Los siguientes productos necesarios para el segundo paso quedan dados por:

$$\begin{aligned} f^2(x_k) &= (f'(\zeta))^2(e_k^2 + 2A_2e_k^3 + (A_2^2 + 2A_3)e_k^4 + 2(A_2A_3 + A_4)e_k^5 + \mathcal{O}(e_k^6)), \\ f^2(y_k) &= (f'(\zeta))^2(A_2^2e_k^4 + 4A_2(-A_2^2 + A_3)e_k^5 + \mathcal{O}(e_k^6)), \\ f(x_k)f(y_k) &= (f'(\zeta))^2(A_2e_k^3 - (A_2^2 - 2A_3)e_k^4 + (3A_2^3 - 4A_2A_3 + 3A_4)e_k^5 + \mathcal{O}(e_k^6)). \end{aligned}$$

Por lo que al sustituir en el segundo paso de la familia iterativa la ecuación del error es:

$$e_{k+1} = \left(-\frac{5}{2}(-1 + \alpha)A_2^3 - A_2A_3\right)e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5).$$

Lo que demuestra que la familia iterativa tiene un orden de convergencia cuatro para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Notar que con $\alpha = 1$ se simplifica la ecuación del error obteniendo:

$$e_{k+1} = -A_2A_3e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5).$$

Una de las formas de medir la eficiencia de un método iterativo es utilizando el índice de eficiencia de Ostrowski (1960), el cual está definido como $IE = p^{1/d}$, donde d es el número de evaluaciones funcionales y p el orden de convergencia del método.

Se ha demostrado que la familia MMA(α) tiene un orden de convergencia $p = 4$ y un total de 3 evaluaciones funcionales. Por lo tanto, el índice de eficiencia de Ostrowski es:

$$IE = 4^{1/3} \approx 1.587401052.$$

La conjetura de Kung-Traub (Kung y Traub, 1974) afirma que el orden de convergencia p de un método iterativo, con d evaluaciones funcionales por cada iteración, no debe ser superior a 2^{d-1} . Cuando se cumple que $2^{d-1} = p$, el método se cataloga como óptimo. Por lo que, en la familia MMA(α) se verifica que $2^{d-1} = 2^{3-1} = 4 = p$, lo que determina que es óptima.

Análisis de estabilidad de la familia iterativa

Esta sección se enfoca en el estudio de las propiedades dinámicas del operador racional obtenido mediante la familia iterativa MMA(α). El análisis dinámico proporciona resultados sobre la estabilidad de cada uno de los elementos de la familia en función de las aproximaciones utilizadas.

El operador racional puede obtenerse tras aplicar el esquema iterativo a una función no lineal $f(x)$; sin embargo, conviene aplicar el esquema a un polinomio cuadrático debido a su sencillez y extrapolar posteriormente estos resultados a funciones más sofisticadas.

Proposición 1. Sea el polinomio $p(x) = (x - a)(x - b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$. El operador racional $W(x; \alpha)$ asociado a la familia $\text{MMA}(\alpha)$ para el polinomio $p(x)$ es:

$$W(x; \alpha) = \frac{x^4(5 - 5\alpha + (16 - 12\alpha)x + (23 - 5\alpha)x^2 + 32x^3 + 28x^4 + 12x^5 + 2x^6)}{2 + 12x + 28x^2 + 32x^3 + (23 - 5\alpha)x^4 + (-12\alpha + 16)x^5 + (-5\alpha + 5)x^6},$$

Donde α es un parámetro complejo arbitrario.

Demostración. Se considera un polinomio de grado dos en su forma general $p(x) = (x - a)(x - b)$ con raíces $a, b \in \mathbb{R}$. Al aplicar la familia $\text{MMA}(\alpha)$ a $p(x)$ se obtiene un operador racional cuya expresión es:

$$R(x; a, b, \alpha) = \frac{ab - x^2}{a + b - 2x} + \frac{(a - x)(-a + x)(-b + x)}{2(a + b - 2x)^5} \left((\alpha - 1)(x - b) \right. \\ \left. (a^2 - 6x(a + b) + 4ab + b^2 + 6x^2) + \frac{(\alpha + 1)(b - x)(a + b - 2x)^6}{S(x; a, b, \alpha)} \right),$$

Donde se ha definido el polinomio $S(x; a, b, \alpha)$ de la siguiente manera:

$$S(x; a, b, \alpha) = a^4 + 2a^3b + (13a^2 + 16ab + 13b^2)x^2 - 2(a + b)(3a^2 + ab + 3b^2)x \\ + a^2b^2 + 2ab^3 - 14x^3(a + b) + b^4 + 7x^4.$$

Se observa que el operador racional está en términos de las raíces a y b aparte del parámetro α , por lo que para eliminar esta dependencia se hará uso de una transformación de Möbius definida como:

$$H(z) = \frac{z - a}{z - b},$$

La cual cumple que $H(a) = 0$, $H(b) = \infty$ y $H(\infty) = 1$. Al aplicar la transformación de Möbius se obtiene un nuevo operador racional que únicamente depende del parámetro α . De este modo:

$$W(x; \alpha) = (H \circ R \circ H^{-1})(x) = \frac{x^4(5 - 5\alpha + (16 - 12\alpha)x + (23 - 5\alpha)x^2 + 32x^3 + 28x^4 + 12x^5 + 2x^6)}{2 + 12x + 28x^2 + 32x^3 + (23 - 5\alpha)x^4 + (-12\alpha + 16)x^5 + (-5\alpha + 5)x^6}. \square$$

Una vez obtenido el operador racional, es posible determinar los puntos fijos de $W(x; \alpha)$. Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es llamado punto fijo si satisface que $W(z_0; \alpha) = z_0$. Por otra parte, un punto fijo es extraño si es distinto a las raíces del polinomio $p(x)$.

Proposición 2. Resolviendo la ecuación $W(x; \alpha) = x$ los resultados que se obtienen son:

- $x = 0$ y $x = \infty$ son puntos fijos para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$.
- $x = 1$ es un punto fijo extraño siempre que $\alpha \neq \frac{59}{11}$.
- Las raíces del polinomio
 $k(t; \alpha) = 2 + 14t + 42t^2 + (69 + 5\alpha)t^3 + (72 + 12\alpha)t^4 + (69 + 5\alpha)t^5 + 42t^6 + 14t^7 + t^8$,

Denotadas por $s_i(\alpha)$ son puntos fijos extraños para $i = 1, 2, \dots, 8$.

Los puntos fijos pueden ser clasificados según el comportamiento con respecto al módulo del operador racional asociado. Por lo que un punto fijo z_0 puede ser:

- Atractor, si $|W'(z_0; \alpha)| < 1$;
- Repulsor, si $|W'(z_0; \alpha)| > 1$;
- Parabólico, si $|W'(z_0; \alpha)| = 1$;
- Superatractor, si $|W'(z_0; \alpha)| = 0$.

Para analizar la estabilidad de los puntos fijos es necesario obtener la derivada del operador racional $W(x; \alpha)$ la cual es:

$$W'(x; \alpha) = \frac{4x^3(1+x)Q(x; \alpha)}{(2 + 12x + 28x^2 + 32x^3 + (23 - 5\alpha)x^4 + (-12\alpha + 16)x^5 + (-5\alpha + 5)x^6)^2}$$

Donde se ha definido el polinomio:

$$Q(x; \alpha) = -10(-1 + \alpha) + (45 - 35\alpha)x + (91 - 29\alpha)x^2 + (159 - \alpha)x^3 - 4(-54 + \alpha)x^4 + (159 - \alpha)x^5 + (91 - 29\alpha)x^6 + (45 - 35\alpha)x^7 - 10(-1 + \alpha)x^8.$$

Proposición 3. Los puntos $x = 0$ y $x = \infty$ son superatractores para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$. El punto fijo extraño $x = 1$ con $\alpha \neq \frac{59}{11}$ del operador racional $W(x; \alpha)$ cumple lo siguiente:

- Si $\left| \alpha - \frac{59}{11} \right| > \frac{224}{11}$, entonces $x = 1$ es un atractor.
- Si $\left| \alpha - \frac{59}{11} \right| < \frac{224}{11}$, entonces $x = 1$ es un repulsor.
- Si $\left| \alpha - \frac{59}{11} \right| = \frac{224}{11}$, entonces $x = 1$ es un punto parabólico.

Demostración. Al evaluar el punto $x = 1$ en la derivada del operador racional se tiene:

$$W'(1; \alpha) = \frac{224}{59 - 11\alpha},$$

Al aplicar la condición de punto fijo atractor se obtiene:

$$|W'(1; \alpha)| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{224}{59 - 11\alpha} \right| < 1,$$

Lo anterior equivale a tener $|59 - 11\alpha| > 224$ y la desigualdad implica que:

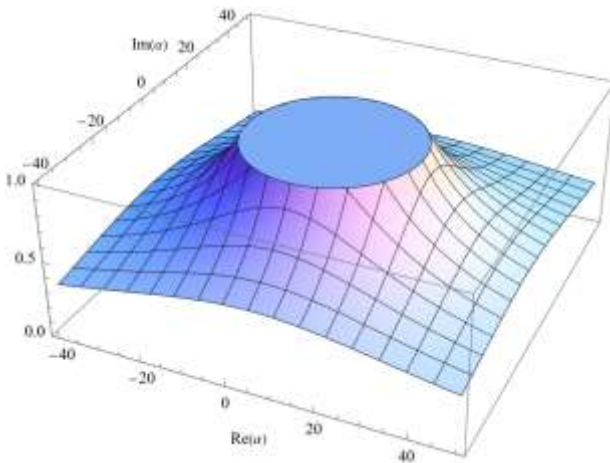
$$\left| \alpha - \frac{59}{11} \right| > \frac{224}{11},$$

Lo que se quería demostrar. De forma análoga se comprueban los demás resultados.

La estabilidad de los puntos fijos extraños $s_i(\alpha)$ será analizada de forma gráfica a través de las superficies de estabilidad. Para la construcción de las superficies de estabilidad se considera una función $\omega: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ cuya regla de correspondencia viene dada por $\omega(\alpha) = W'(s_i(\alpha); \alpha)$. En el plano XY se ubican las partes reales e imaginarias de α y en el eje Z las imágenes $|\omega(\alpha)|$.

Figura 1

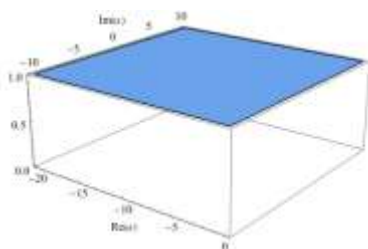
Superficie de estabilidad para $x = 1$



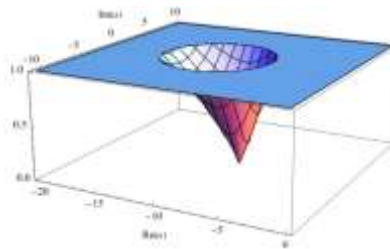
Nota. Elaboración propia.

Figura 2

Superficies de estabilidad para $x = s_i(\alpha)$ con $i = 1, 2, \dots, 8$.



a) $x = s_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, 7$.



b) $x = s_8(\alpha)$.

Nota. Elaboración propia.

Mediante las superficies se identifican las regiones donde cada punto fijo extraño es repulsor, atractor o parabólico.

Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es llamado punto crítico si cumple que $W'(z_0; \alpha) = 0$. Un punto crítico es libre si es distinto de las raíces del polinomio $p(x)$. El siguiente resultado muestra un análisis de los puntos críticos y puntos críticos libres.

Proposición 4. Los puntos críticos del operador racional $W(x; \alpha)$ son $x = 0$ y $x = \infty$. Mientras que los puntos críticos libres corresponden a $x = -1$ y las raíces del polinomio de grado ocho:

$$\begin{aligned} \mu(t; \alpha) = & -10 + 10\alpha + (-45 + 35\alpha)t + (-91 + 29\alpha)t^2 + (-159 + \alpha)t^3 + (-216 + 4\alpha)t^4 \\ & + (-159 + \alpha)t^5 + (-91 + 29\alpha)t^6 + (-45 + 35\alpha)t^7 + (-10 + 10\alpha)t^8 \end{aligned}$$

Denotadas por $f_i(\alpha)$ para $i = 1, 2, \dots, 8$.

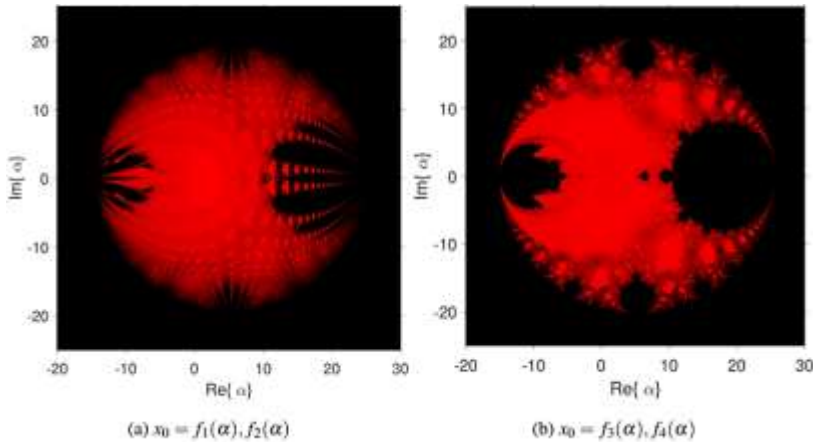
Un plano de parámetros es una herramienta gráfica de la dinámica compleja que permite analizar la estabilidad de una familia iterativa. Consiste en tomar un mallado del plano complejo, donde cada punto α del mallado determina una estimación inicial $x_0 = f_i(\alpha)$, la cual es aplicada al esquema iterativo. Si con dicha estimación inicial el método logra converger a alguna de las raíces del polinomio, el punto es coloreado en rojo; en caso contrario el punto α es coloreado en negro. Para la construcción de los planos de parámetros se ha tomado la región del plano complejo $[-20, 30] \times [-25, 25]$, un mallado de 1000×1000 puntos, una tolerancia de 10^{-3} y una cantidad máxima de 100 iteraciones. Se ha considerado el código de MATLAB desarrollado por Chicharro *et al.* (2013) para la obtención de los planos de parámetros. En las Figuras 3 y 4 se muestran los planos de

parámetros para cada una de las estimaciones iniciales $x_0 = f_i(\alpha)$. Notar que la región de convergencia está contenida en el disco:

$$D = \left\{ \alpha \in \mathbb{C} : \left| \alpha - \frac{59}{11} \right| < \frac{224}{11} \right\}, \text{ lo cual tiene relación con la Proposición 3.}$$

Figura 3

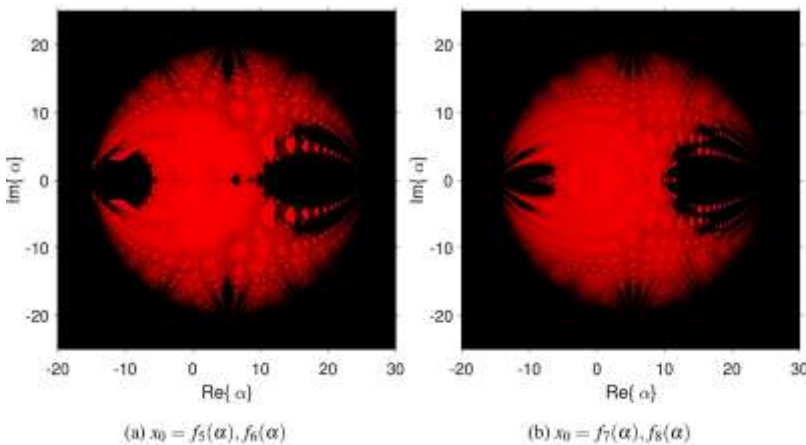
Planos de parámetros para $x_0 = f_i(\alpha)$ con $i = 1, 2, 3, 4$.



Nota. Elaboración propia.

Figura 4

Planos de parámetros para $x_0 = f_i(\alpha)$ con $i = 5, 6, 7, 8$.



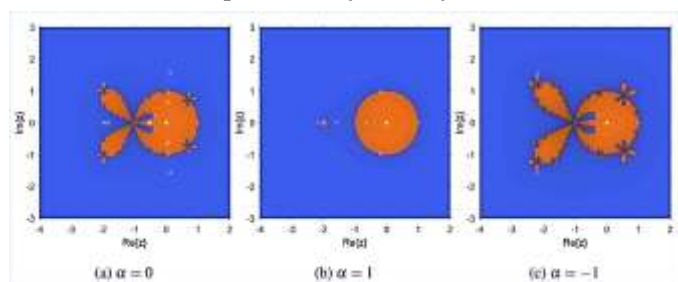
Nota. Elaboración propia.

A continuación, se ilustran los planos dinámicos que sirven para verificar y extender la información obtenida con los planos de parámetros. Un plano dinámico representa el estado final de una órbita para diferentes estimaciones iniciales. Todo punto $x_0 \in \mathbb{C}$ representa una estimación inicial y dependiendo a cuál raíz converja tras ser aplicada al método se le asigna un color.

Para dibujar los planos dinámicos, se toman valores de α que pertenezcan a regiones estables e inestables en los planos de parámetros. Se tomará un mallado de 1000×1000 puntos, se fijará una cantidad de 40 iteraciones y una tolerancia de 10^{-3} . Se ha considerado el código de MATLAB desarrollado por (Chicharro et al., 2013) para la obtención de los planos dinámicos.

Figura 5

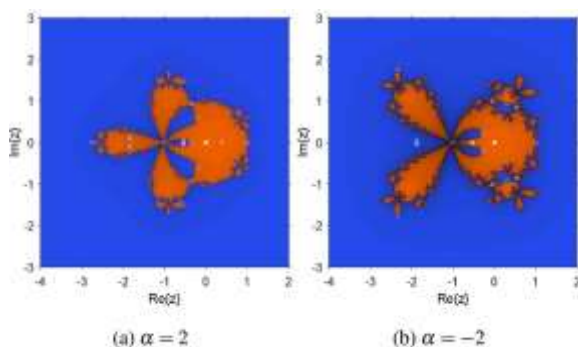
Planos dinámicos para $\alpha \in \{0, 1, -1\}$.



Nota. Elaboración propia.

Figura 6

Planos dinámicos para $\alpha \in \{2, -2\}$.



Nota. Elaboración propia.

Para obtener los planos dinámicos mostrados en las Figuras 5 y 6, se han tomado los valores $\alpha \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ que pertenecen a zonas de convergencia en los planos de parámetros.

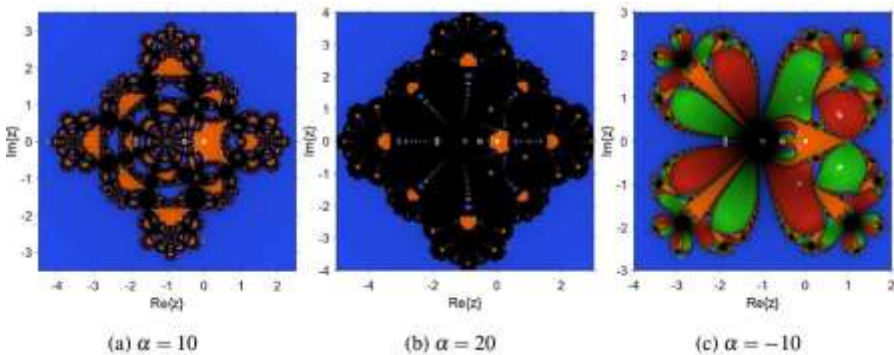
Además, con $\alpha = 1$ se ha observado que se simplifica la expresión del operador racional $W(x; \alpha)$, mientras que para $\alpha = -1$ la ecuación del error e_{k+1} se hace más simple.

- Para $\alpha = -1$ se obtienen dos cuencas de atracción que son las de $x = 0$ y $x = \infty$. La cuenca de $x = 0$ corresponde a los dos círculos de color naranja y la cuenca de $x = \infty$ es representada en color azul. En este caso, se tienen únicamente tres puntos críticos.
- Con $\alpha = 1$ se obtiene exactamente el plano dinámico mostrado en Moscoso Martínez *et al.* (2024). Además, únicamente existen dos puntos críticos.

Al tomar los valores de $\alpha = -2, 0, 2$ se sigue observando una dinámica estable en los planos. Sin embargo, la cantidad de puntos críticos se ve incrementada a diez para cada uno.

Figura 7

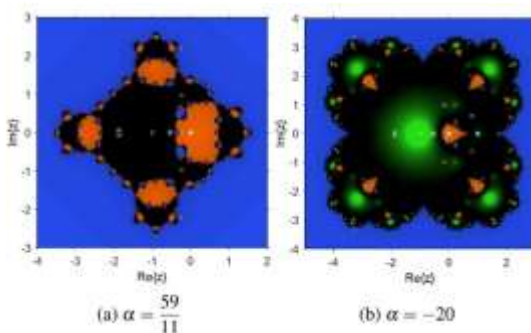
Planos dinámicos para $\alpha \in \{10, 20, -10\}$.



Nota. Elaboración propia.

Figura 8

Planos dinámicos para $\alpha \in \{59/11, -20\}$.



Nota. Elaboración propia.

Para la construcción de los planos dinámicos con comportamiento inestable mostrados en las Figuras 7 y 8, se han considerado los valores $\alpha \in \left\{10, 20, -10, -20, \frac{59}{11}\right\}$, ya que pertenecen a zonas de no convergencia en los planos de parámetros.

- Fijando $\alpha = -10$, se tienen cuatro cuencas de atracción, las asociadas a las dos raíces del polinomio y otras dos representadas en color verde y rojo que son de los atractores $x = 0.8073 \pm 0.5902i$.
- Con $\alpha = -20$, según la Proposición 3 se tiene que el punto fijo extraño $x = 1$ es atractor, por lo que la cuenca de color verde está relacionada con dicho punto, lo que puede producir un comportamiento caótico y que las estimaciones iniciales converjan hacia él y no a las raíces.
- Con los valores de $\alpha = 10, 20, \frac{59}{11}$ existen tres cuencas de atracción en los planos dinámicos: dos correspondientes a las raíces y una tercera, representada en color negro, lo que indica que el método no logra converger para dichas estimaciones iniciales. De forma particular con $\alpha = \frac{59}{11}$, $x = 1$ no es un punto fijo extraño, lo que verifica la Proposición 2; a pesar de eso se evidencia un comportamiento inestable.

Discusión

En esta sección se llevarán a cabo diversas pruebas numéricas para confirmar la validez de los resultados relacionados con la convergencia y la estabilidad de la familia $MMA(\alpha)$. Para realizar las pruebas numéricas, se tomará en cuenta un valor del parámetro α que genere un método estable y otro valor de α que genere un método inestable, y cada uno de los métodos será aplicado a diez ecuaciones no lineales que se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1

Ecuaciones no lineales de prueba

Ecuaciones no lineales	Raíces
$h_1(x) = x^3 - 2x^2 + 5 = 0$	$\zeta \approx -1.24189$
$h_2(x) = 2 + \sqrt{x^2 + 2x + 5} - x^2 + 3 = 0$	$\zeta \approx -1.70251$
$h_3(x) = \sin^{-1}(x^2 - 1) + \frac{1}{2}x^2 - 1 = 0$	$\zeta \approx 1.15289$
$h_4(x) = \tan^{-1}(x^3) + \sqrt{x^2 + 2x} - 4 = 0$	$\zeta \approx 1.78793$
$h_5(x) = xe^{x^2} - \sin^2(x) + 3 + \cos(x) + 5 = 0$	$\zeta \approx -1.20764$
$h_6(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5} - \sin(x) - x^2 + 3 = 0$	$\zeta \approx -2.57316$
$h_7(x) = x^2 - e^x - 3x + 2 = 0$	$\zeta \approx 0.25753$
$h_8(x) = x^3 - e^{-\sin(x)} - 2 = 0$	$\zeta \approx 1.33480$

Ecuaciones no lineales	Raíces
$h(x) = \log(x) + \sqrt{x} - 5 = 0$	$\zeta \approx 8.30943$
$h_{10}(x) = x^3 + x^2 + x - 2 = 0$	$\zeta \approx 0.81053$

Nota. Elaboración propia.

Para realizar las pruebas numéricas se utiliza el programa MATLAB 2022b, con una aritmética de precisión variable de 500 dígitos de mantisa. Como criterio de parada, se establece que $|f(x_{k+1})| < 10^{-100}$ o $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-100}$, y se fija un número máximo de 30 iteraciones. Para verificar el orden de convergencia teórico, se obtendrá el orden de convergencia computacional aproximado (ACOC) definido en Cordero y Torregrosa (2007), el cual se encuentra como:

$$\text{ACOC} = \frac{\ln \frac{|x_{j+1} - x_j|}{|x_j - x_{j-1}|}}{\ln \frac{|x_j - x_{j-1}|}{|x_{j-1} - x_{j-2}|}}, \quad j = 2, 3, \dots$$

Si el método no converge en las 30 iteraciones, el ACOC es indicado como “n.c”, y si el ACOC no logra estabilizarse en torno al orden de convergencia teórico, se utiliza “-”. Finalmente, se incluirá el tiempo de ejecución en cada prueba.

En las pruebas numéricas se tomarán los parámetros $\alpha = 0$ y $\alpha = -10$. Con $\alpha = 0$ se obtiene un comportamiento estable, esto se puede verificar en los planos dinámicos y planos de parámetros. En cambio, con $\alpha = -10$, se evidencia un comportamiento inestable, tal como lo muestra el respectivo plano dinámico. Además, para $\alpha = -10$, (según la Figura 2b), el punto fijo extraño $s_8(\alpha)$ es atractor, lo que puede provocar que las estimaciones no converjan a la solución.

Para evaluar la sensibilidad del método frente a las condiciones iniciales, se tomarán tres estimaciones, las cuales se tomarán en función a su distancia con la raíz ζ . Particularmente, las estimaciones serán $x_0 \approx \zeta$, $x_0 \approx 3\zeta$ y $x_0 \approx 10\zeta$. A partir de estos resultados es posible concluir la robustez del método y cómo las condiciones iniciales influyen en el proceso de la búsqueda de la solución aproximada.

Tabla 2

Resultados de las pruebas numéricas para MMA(0).

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	Iteraciones	ACOC	Tiempo
	$x_0 \approx \zeta$					
h_1	0.8	7.9275×10^{-95}	1.7777×10^{-376}	4	4.0000	0.08108

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	Iteraciones	ACOC	Tiempo
h_2	-0.5	2.5278×10^{-31}	2.5222×10^{-125}	3	3.9714	0.12966
h_3	1.9	3.2720×10^{-101}	3.9961×10^{-403}	4	4.0000	0.09398
h_4	1.7	3.2317×10^{-27}	1.7603×10^{-108}	3	4.0012	0.08777
h_5	-1.1	8.9414×10^{-44}	7.0947×10^{-144}	4	3.9997	0.09558
h_6	-2.6	5.1296×10^{-33}	1.6722×10^{-130}	3	3.9961	0.10314
h_7	0.3	5.0421×10^{-35}	8.0408×10^{-140}	3	4.0025	0.04577
h_8	1.3	4.5676×10^{-96}	1.7247×10^{-381}	4	4.0000	0.06748
h_9	8.2	3.6585×10^{-37}	3.2372×10^{-151}	3	3.9997	0.06195
h_{10}	0.8	1.4327×10^{-32}	1.7041×10^{-127}	3	4.0029	0.04510
$x_0 \approx 3\zeta$						
h_1	2.4	3.7659×10^{-43}	9.0533×10^{-170}	5	3.9995	0.13208
h_2	-1.5	1.7231×10^{-61}	5.4464×10^{-246}	5	3.9999	0.26036
h_3	5.7	1.0328×10^{-31}	3.9678×10^{-125}	5	4.0144	0.09397
h_4	1.7	1.3585×10^{-32}	5.4967×10^{-130}	4	3.9989	0.15262
h_5	5.1	9.7755×10^{-79}	1.0136×10^{-310}	8	4.0000	0.25394
h_6	-7.8	2.1944×10^{-34}	5.6007×10^{-136}	5	3.9969	0.15988
h_7	0.9	1.7577×10^{-90}	1.1876×10^{-361}	4	4.0000	0.05402
h_8	5.2	1.1063×10^{-32}	5.9354×10^{-128}	5	3.9971	0.07748
h_9	24.6	5.0721×10^{-66}	1.1959×10^{-266}	7	4.0000	0.12558
h_{10}	2.4	4.6921×10^{-49}	1.9600×10^{-193}	5	3.9998	0.08705
x_0						
h_1	8.0	3.8196×10^{-27}	9.58038×10^{-106}	6	3.9918	0.16444
h_2	-5.0	7.0436×10^{-46}	2.05908×10^{-181}	5	3.9996	0.19291
h_3	19.0	5.8374×10^{-47}	4.04817×10^{-186}	6	3.9985	0.13096
h_4	17.0	9.5630×10^{-100}	1.34965×10^{-398}	5	4.000	0.1563

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	Iteraciones	ACOC	Tiempo
h_5	-11.0	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c
h_6	-26.0	1.2974×10^{-55}	6.84452×10^{-221}	6	3.9999	0.18133
h_7	3.0	4.7384×10^{-45}	6.27101×10^{-180}	5	3.9995	0.097001
h_8	13.0	8.7123×10^{-67}	2.28338×10^{-264}	7	4.0000	0.1549
h_9	82.0	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c
h_{10}	8.0	4.3557×10^{-31}	1.45535×10^{-121}	6	3.9962	0.11421

Nota. Elaboración propia.

Tabla 3

Resultados de las pruebas numéricas para MMA(-10).

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	Iteraciones	ACOC	Tiempo
$x_0 \approx \zeta$						
h_1	0.8	7.1555×10^{-72}	1.4544×10^{-283}	4	4.0000	0.06092
h_2	-0.5	9.0599×10^{-31}	6.2468×10^{-123}	3	3.9569	0.10560
h_3	1.9	3.7868×10^{-63}	7.0501×10^{-249}	4	4.0000	0.07224
h_4	1.7	8.0971×10^{-76}	2.0847×10^{-301}	4	4.0000	0.09953
h_5	-1.1	1.1287×10^{-71}	2.9734×10^{-281}	5	4.0000	0.12509
h_6	-2.6	2.2903×10^{-28}	5.7335×10^{-111}	3	3.9940	0.07925
h_7	0.3	8.3410×10^{-32}	3.1300×10^{-126}	3	3.9876	0.04108
h_8	1.3	9.0788×10^{-73}	3.4515×10^{-287}	4	4.0000	0.06180
h_9	8.2	1.3092×10^{-29}	1.6991×10^{-119}	3	4.0009	0.04549
h_{10}	0.8	5.0446×10^{-27}	3.3647×10^{-104}	3	4.0037	0.04313
$x_0 \approx 3\zeta$						
h_1	2.4	1.5038×10^{-82}	2.8376×10^{-326}	13	4.0000	0.23772
h_2	-1.5	3.1090×10^{-27}	8.6633×10^{-109}	9	4.0521	0.29875
h_3	5.7	1.5954×10^{-62}	2.2213×10^{-246}	8	4.0000	0.16470
h_4	1.7	1.7138×10^{-73}	4.1838×10^{-292}	4	4.0000	0.11395
h_5	5.1	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c
h_6	-7.8	8.5982×10^{-27}	1.1387×10^{-104}	11	3.9919	0.30607
h_7	0.9	6.6327×10^{-87}	1.2515×10^{-346}	4	4.0000	0.06353
h_8	5.2	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c
h_9	24.6	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c
h_{10}	2.4	2.1012×10^{-76}	1.0122×10^{-301}	13	4.0000	0.19348

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	Iteraciones	ACOC	Tiempo
$x_0 \approx 10\zeta$						
h_1	8.0	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c
h_2	-5.0	1.7744×10^{-56}	9.1921×10^{-226}	10	4.0005	0.47571
h_3	19.0	4.3101×10^{-97}	1.1832×10^{-384}	11	4.0000	0.33387
h_4	17.0	6.7542×10^{-73}	1.0093×10^{-289}	5	4.0000	0.15014
h_5	-11.0	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c
h_6	-26.0	4.4476×10^{-32}	8.1531×10^{-126}	8	3.9969	0.39182
h_7	3.0	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c
h_8	13.0	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c
h_9	82.0	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c
h_{10}	8.0	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c

Nota. Elaboración propia.

En las Tablas 2 y 3 se muestran los resultados numéricos para los dos parámetros elegidos. Con $\alpha = 0$ y considerando una estimación cercana a la raíz ($x_0 \approx \zeta$) se observa que el método MMA(0) logra converger a la solución utilizando tres o cuatro iteraciones en cada una de las ecuaciones. El ACOC tiende a estabilizarse alrededor del orden de convergencia teórico del método. Y los tiempos de ejecución están por debajo 0.13 segundos.

Para $x_0 \approx 3\zeta$ la cantidad de iteraciones se ve incrementada, pues se requieren entre cuatro y ocho iteraciones para alcanzar la tolerancia predeterminada. Lo mismo ocurre con el tiempo de ejecución, pues el mayor tiempo fue de 0.26036 segundos. A pesar de eso, se observan resultados favorables para $|x_{k+1} - x_k|$ y $|f(x_{k+1})|$.

Finalmente, si se toma $x_0 \approx 10\zeta$, el método MMA(0) no logra converger a la solución de las ecuaciones h_5 y h_9 . Para el resto de ecuaciones, el método logra converger utilizando entre cinco y siete iteraciones con valores del ACOC aproximándose a cuatro. Además, el tiempo de ejecución es a lo más de 0.19261 segundos. Por lo que, descartando esas dos ecuaciones, se confirma que el método es robusto al tomar estimaciones iniciales muy lejanas a la raíz.

Seleccionando $\alpha = -10$ y la estimación inicial $x_0 \approx \zeta$ se necesitan entre tres y cinco iteraciones para alcanzar la tolerancia establecida. Se puede decir que se presenta un comportamiento similar al del caso de $\alpha = 0$, con la excepción que, en la ecuación h_5 se necesitan ahora cinco iteraciones. En todos los casos, el ACOC se estabiliza cerca de cuatro y el mayor tiempo de ejecución fue de 0.12509 segundos.

Para $x_0 \approx 3\zeta$, se observa que el método no logra converger para las ecuaciones h_5 , h_8 y h_9 . La menor cantidad de iteraciones que se realizaron fueron cuatro en las ecuaciones h_4 y h_7 , mientras que la ecuación h_1 necesitó una cantidad de trece iteraciones. Lo que implica que, el tiempo de ejecución fue superior debido al incremento de las iteraciones que se realizaron, oscilando entre 0.06353 y 0.30607 segundos.

Con $x_0 \approx 10\zeta$, se observa que el método únicamente logra converger en el caso de las ecuaciones h , h_3 , h_4 y h_6 . Con estos resultados se confirma que, para $\alpha = -10$ el método adquiere un comportamiento inestable al considerar estimaciones iniciales más lejanas de la raíz.

Ahora, se consideran siete métodos iterativos de orden cuatro para realizar un análisis comparativo con un método estable de la familia MMA(α). El valor a tomar será $\alpha = 0.5$, se utilizarán las misma especificaciones que fueron descritas anteriormente. Los métodos que se serán empleados en esta comparativa son los siguientes:

- El método de Ostrowski (1960), denotado como MO y definido como:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = y_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- El método de Jarratt (1969), denotado como MJ y su expresión iterativa es:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{2}{3} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} = x_k - \frac{1}{2} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(\frac{3f'(y_k) + f'(x_k)}{3f'(y_k) - f'(x_k)} \right), \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- El método de Artidiello (2014), denotado como MA y está definido como:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = y_k - \left(1 + 2 \frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}. \end{cases}$$

- El método diseñado en Tassaddiq *et al.* (2025) denotado como MT y su expresión es:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{2}{3} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, & k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = x_k + \left(\frac{7}{4} - \frac{3}{4} \frac{f'(y_k)}{f'(x_k)} \right) \left(\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right) - \frac{8f(x_k)}{f'(x_k) + 3f'(y_k)}. \end{cases}$$

- El método construido en Cordero *et al.* (2023) denotado como MCL y su expresión es:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{2}{3} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, & k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = x_k - \left[\left(\frac{5}{8} - \gamma \right) + \gamma u_k + \frac{\gamma}{3} \frac{1}{u_k} + \left(\frac{3}{8} - \frac{\gamma}{3} \right) u_k^2 \right] \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \end{cases}$$

Donde se considera $\gamma = \frac{1}{2}$ y $u_k = \frac{f'(x_k)}{f'(y_k)}$.

- El método diseñado en Cordero *et al.* (2022) denotado como MCMJ y su expresión es:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, & k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right)^3 + 2 \left(\frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right)^2 + \frac{f(y_k)}{f(x_k)} + 1 \right] \end{cases}$$

- El método propuesto en Kou *et al.* (2007) denotado como MK y su expresión es:

$$\begin{cases} y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, & k = 0, 1, 2, \dots, \\ x_{k+1} = x_k - \frac{1}{f'(x_k)} \frac{f^2(x_k) + f^2(y_k)}{f(x_k) - f(y_k)}. \end{cases}$$

En las Tablas 4, 5 y 6 se muestran los resultados obtenidos para las pruebas numéricas para el valor del parámetro estable $\alpha = 0.5$ y tomando una estimación inicial $x_0 \approx \zeta$. Por cada ecuación $h_i(x)$ con $i = 1, 2, \dots, 10$ se incluyen cada uno de los métodos que se han considerado.

Tabla 4

Rendimiento numérico de métodos iterativos en ecuaciones no lineales para $x_0 \approx \zeta$ (1/3).

Función	Método	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	Iteraciones	ACOC	Tiempo
h_1 $x_0 = 0.8$	MMA	5.3160×10^{-26}	1.5590×10^{-101}	3	4.0120	0.056763
	MO	8.9752×10^{-27}	9.3592×10^{-105}	3	4.0057	0.051244
	MJ	8.9752×10^{-27}	9.3592×10^{-105}	3	4.0057	0.050840
	MA	6.8267×10^{-88}	2.0848×10^{-348}	4	4.0000	0.054135
	MT	3.8133×10^{-93}	1.1673×10^{-369}	4	4.0000	0.076675
	MCL	2.0532×10^{-98}	5.6049×10^{-391}	4	4.0000	0.091018
	MCM	3.0775×10^{-88}	8.3048×10^{-350}	4	4.0000	0.063597
	MK	3.8133×10^{-93}	1.1673×10^{-369}	4	4.0000	0.060175
h_2 $x_0 = -0.5$	MMA	2.3469×10^{-31}	1.8270×10^{-125}	3	3.9724	0.106970
	MO	2.3123×10^{-31}	1.7126×10^{-125}	3	3.9726	0.084092
	MJ	1.8194×10^{-31}	5.3269×10^{-126}	3	3.9872	0.117550
	MA	2.9222×10^{-31}	4.7297×10^{-125}	3	3.9695	0.083164
	MT	2.0690×10^{-31}	9.3613×10^{-126}	3	3.9850	0.088116
	MCL	1.9213×10^{-31}	6.7660×10^{-126}	3	3.9863	0.101070
	MCM	2.8946×10^{-31}	4.5391×10^{-125}	3	3.9696	0.099559
	MK	2.6038×10^{-31}	2.8679×10^{-125}	3	3.9710	0.083039
h_3 $x_0 = 1.9$	MMA	3.5033×10^{-94}	2.0308×10^{-374}	4	4.0000	0.081411
	MO	1.8268×10^{-91}	1.8793×10^{-363}	4	4.0000	0.09623
	MJ	7.9901×10^{-26}	2.3075×10^{-101}	3	3.9657	0.06142
	MA	6.1095×10^{-83}	5.2139×10^{-329}	4	4.0000	0.066254
	MT	2.2612×10^{-88}	5.6171×10^{-351}	4	4.0000	0.090554
	MCL	4.8064×10^{-100}	3.0604×10^{-398}	4	4.0000	0.082447
	MCM	1.6196×10^{-83}	2.4193×10^{-331}	4	4.0000	0.090322
	MK	2.1043×10^{-94}	2.0143×10^{-375}	4	4.0000	0.094050
h_4 $x_0 = 1.7$	MMA	5.6066×10^{-99}	4.0703×10^{-395}	4	4.0000	0.145170
	MO	5.4549×10^{-98}	4.0911×10^{-391}	4	4.0000	0.141630

Función	Método	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	Iteraciones	ACOC	Tiempo
	MJ	7.8331×10^{-26}	9.6803×10^{-103}	3	4.0208	0.075112
	MA	1.9800×10^{-99}	5.2220×10^{-397}	4	4.0000	0.098559
	MT	6.8405×10^{-27}	3.1476×10^{-107}	3	4.0302	0.090516
	MCL	2.3241×10^{-28}	2.5926×10^{-113}	3	4.0084	0.072334
	MCM	2.8926×10^{-100}	2.1445×10^{-400}	4	4.0000	0.164610
	MK	1.2095×10^{-31}	1.3089×10^{-126}	3	3.9058	0.066138

Nota. Elaboración propia.

Tabla 5

Rendimiento numérico de métodos iterativos en ecuaciones no lineales para $x_0 \approx \zeta$ (2/3).

Función	Método	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	Iteraciones	ACOC	Tiempo
h_5 $x_0 = -1.1$	MMA	2.0299×10^{-55}	4.2377×10^{-218}	4	3.9999	0.105680
	MO	2.4243×10^{-73}	2.6777×10^{-290}	4	4.0000	0.098740
	MJ	7.7013×10^{-68}	4.5165×10^{-268}	4	4.0000	0.122500
	MA	1.1702×10^{-35}	5.3078×10^{-138}	4	3.9993	0.102590
	MT	8.1240×10^{-43}	6.5557×10^{-167}	4	3.9998	0.108580
	MCL	1.1954×10^{-50}	1.4420×10^{-198}	4	4.0000	0.122690
	MCMJ	3.7043×10^{-36}	5.1138×10^{-140}	4	3.9993	0.115300
	MK	4.861×10^{-43}	8.1188×10^{-168}	4	3.9998	0.123060
h_6 $x_0 = -2.6$	MMA	4.8705×10^{-34}	8.4086×10^{-135}	3	3.9970	0.088875
	MO	2.6203×10^{-34}	6.1760×10^{-136}	3	3.9976	0.073046
	MJ	2.1172×10^{-34}	2.5228×10^{-136}	3	3.9976	0.070031
	MA	8.4452×10^{-32}	2.1656×10^{-125}	3	3.9953	0.061851
	MT	9.5016×10^{-33}	2.2244×10^{-129}	3	3.9961	0.080876
	MCL	1.5043×10^{-33}	9.5963×10^{-133}	3	3.9969	0.076475
	MCMJ	7.3172×10^{-32}	1.1852×10^{-125}	3	3.9954	0.065947
	MK	1.0509×10^{-32}	3.3949×10^{-129}	3	3.9962	0.084708
h_7 $x_0 = 0.3$	MMA	1.671×10^{-34}	1.2704×10^{-137}	3	4.0000	0.066588
	MO	2.0664×10^{-34}	3.1118×10^{-137}	3	3.9997	0.044890

Función	Método	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	Iteraciones	ACOC	Tiempo
h_8	MJ	9.6462×10^{-34}	1.9962×10^{-134}	3	4.0003	0.039844
	MA	9.9771×10^{-37}	4.6867×10^{-147}	3	4.0167	0.037691
	MT	2.4499×10^{-34}	6.0841×10^{-137}	3	4.0034	0.040670
	MCL	5.6838×10^{-34}	2.1361×10^{-135}	3	4.0014	0.044961
	MCMJ	1.4694×10^{-36}	2.4447×10^{-146}	3	4.0148	0.040243
	MK	2.8691×10^{-35}	7.3851×10^{-141}	3	4.0041	0.035963
$x_0 = 1.3$	MMA	1.7576×10^{-26}	1.5462×10^{-103}	3	4.0106	0.10465
	MO	2.3933×10^{-27}	3.7795×10^{-107}	3	4.0004	0.042285
	MJ	2.3577×10^{-27}	3.5488×10^{-107}	3	4.0004	0.080424
	MA	6.2361×10^{-89}	1.3076×10^{-352}	4	4.0000	0.055801
	MT	2.5432×10^{-94}	2.0480×10^{-374}	4	4.0000	0.081862
	MCL	7.708×10^{-100}	9.6108×10^{-397}	4	4.0000	0.073740
	MCMJ	2.7712×10^{-89}	4.9155×10^{-354}	4	4.0000	0.100130
	MK	2.5795×10^{-94}	2.1689×10^{-374}	4	4.0000	0.071162

Nota. Elaboración propia.

Tabla 6

Rendimiento numérico de métodos iterativos en ecuaciones no lineales para $x_0 \approx \zeta$ (3/3).

Función	Método	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	Iteraciones	ACOC	Tiempo
h_9	MMA	2.2143×10^{-38}	2.3904×10^{-156}	3	4.0024	0.131560
	MO	1.9013×10^{-37}	2.0314×10^{-152}	3	4.0012	0.053045
	MJ	3.8044×10^{-39}	1.4863×10^{-159}	3	4.0013	0.075607
	MA	4.4574×10^{-34}	2.9250×10^{-138}	3	4.0005	0.037770
	MT	1.5574×10^{-35}	2.2195×10^{-144}	3	4.0009	0.047220
	MCL	4.5429×10^{-38}	4.9912×10^{-155}	3	4.0009	0.056460
	MCMJ	3.4469×10^{-34}	9.9327×10^{-139}	3	4.0006	0.041583
	MK	4.3597×10^{-36}	1.0577×10^{-146}	3	4.0008	0.038904
h_{10}	MMA	1.5975×10^{-34}	1.0734×10^{-135}	3	4.0026	0.069138
	MO	2.6210×10^{-35}	5.5176×10^{-139}	3	4.0010	0.051888

Función	Método	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	Iteraciones	ACOC	Tiempo
	MJ	2.6210×10^{-35}	5.5176×10^{-139}	3	4.0010	0.039732
	MA	7.1564×10^{-31}	2.3173×10^{-120}	3	4.0032	0.036821
	MT	4.0140×10^{-32}	1.2986×10^{-125}	3	4.0023	0.040842
	MCL	2.0592×10^{-33}	4.9953×10^{-131}	3	4.0017	0.052987
	MCMJ	5.9352×10^{-31}	1.0567×10^{-120}	3	4.0031	0.076812
	MK	4.0140×10^{-32}	1.2986×10^{-125}	3	4.0023	0.042065

Nota. Elaboración propia.

Se puede observar que el método MMA(0.5) presenta un rendimiento competitivo frente a los demás métodos. En algunas ecuaciones, realiza la menor cantidad de iteraciones, al igual que métodos clásicos como MO y MJ. Esto se evidencia en las funciones h_1 y h_8 , donde MMA(0.5) sobresale frente al resto de los métodos, necesitando de tres iteraciones para lograr la tolerancia. En el resto de ecuaciones, todos los métodos realizan la misma cantidad de iteraciones; sin embargo, en algunos casos el método MMA(0.5) se sitúa como uno de los métodos que presenta los errores más bajos. Esto se observa, por ejemplo, en las funciones h_5 , h_6 , h_9 y h_{10} , donde, junto con MO y MJ, destacan por poseer valores menores en los errores $|x_{k+1} - x_k|$ y $|f(x_{k+1})|$.

Tabla 7

Rendimiento numérico de métodos iterativos en ecuaciones no lineales para $x_0 \approx 10\zeta$ (1/4).

Función	Método	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	Iteraciones	ACOC	Tiempo
h_1	MMA	3.5395×10^{-43}	3.0638×10^{-170}	6	3.9994	0.097733
$x_0 = 8.0$	MO	6.0277×10^{-35}	1.9041×10^{-137}	6	3.9986	0.114370
	MJ	6.0277×10^{-35}	1.9041×10^{-137}	6	3.9986	0.072184
	MA	3.7803×10^{-44}	1.9603×10^{-173}	7	3.9996	0.079888
	MT	2.0209×10^{-63}	9.2074×10^{-251}	7	4.0000	0.101690
	MCL	2.0343×10^{-89}	5.4021×10^{-355}	7	4.0000	0.103580
	MCMJ	3.7259×10^{-45}	1.7844×10^{-177}	7	3.9997	0.089682
	MK	2.0209×10^{-63}	9.2074×10^{-251}	7	4.0000	0.103360

Nota. Elaboración propia.

Tabla 8

Rendimiento numérico de métodos iterativos en ecuaciones no lineales para $x_0 \approx 10\zeta$ (2/4).

Función	Método	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	Iteraciones	ACOC	Tiempo
h_2 $x_0 = -5.0$	MMA	3.6811×10^{-71}	8.7814×10^{-283}	11	4.0000	0.37168
	MO	2.7803×10^{-71}	3.5801×10^{-285}	5	4.0000	0.14019
	MJ	3.4429×10^{-39}	6.8309×10^{-157}	15	3.9968	0.45769
	MA	2.7228×10^{-38}	3.5650×10^{-153}	6	4.0067	0.17649
	MT	4.1799×10^{-63}	1.5596×10^{-252}	7	3.9999	0.20045
	MCL	1.4854×10^{-36}	2.4173×10^{-146}	7	4.0050	0.29243
	MCMJ	2.3727×10^{-38}	2.0494×10^{-153}	6	4.0066	0.21024
	MK	2.607×10^{-77}	2.8817×10^{-309}	6	4.0000	0.18146
h_3 $x_0 = 19.0$	MMA	3.4962×10^{-50}	2.0143×10^{-198}	6	3.9998	0.22053
	MO	1.8457×10^{-46}	1.9583×10^{-183}	6	4.0002	0.11249
	MJ	2.3115×10^{-54}	1.6161×10^{-215}	6	3.9998	0.14870
	MA	3.9042×10^{-87}	8.6946×10^{-346}	7	4.0000	0.13007
	MT	5.2275×10^{-37}	1.6046×10^{-145}	6	4.0003	0.15546
	MCL	1.3641×10^{-45}	1.9858×10^{-180}	6	3.9996	0.16404
	MCMJ	7.6722×10^{-88}	1.2182×10^{-348}	7	4.0000	0.18023
	MK	1.0198×10^{-98}	1.1111×10^{-392}	7	4.0000	0.17241
h_4 $x_0 = 17.0$	MMA	2.4684×10^{-92}	1.5292×10^{-368}	5	4.0000	0.143070
	MO	2.9920×10^{-91}	3.7029×10^{-364}	5	4.0000	0.105070
	MJ	5.0866×10^{-77}	1.7214×10^{-307}	5	4.0000	0.127730
	MA	1.3024×10^{-96}	9.7760×10^{-386}	5	4.0000	0.142400
	MT	2.4220×10^{-80}	4.9468×10^{-321}	5	4.0000	0.163760
	MCL	1.9060×10^{-89}	1.1727×10^{-357}	5	4.0000	0.114330
	MCMJ	9.1983×10^{-98}	2.1929×10^{-390}	5	4.0000	0.108410
	MK	2.7701×10^{-26}	3.6010×10^{-105}	4	4.0369	0.084214
h_5 $x_0 = -11.0$	MMA	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c
	MO	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c

Función	Método	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	Iteraciones	ACOC	Tiempo
	MJ	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c
	MA	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c
	MT	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c
	MCL	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c
	MCMJ	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c
	MK	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c

Nota. Elaboración propia.

Tabla 9

Rendimiento numérico de métodos iterativos en ecuaciones no lineales para $x_0 \approx 10\zeta(3/4)$.

Función	Método	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	Iteraciones	ACOC	Tiempo
h_6 $x_0 = -26.0$	MMA	9.5826×10^{-88}	1.2600×10^{-349}	6	4.0000	0.189960
	MO	1.5348×10^{-75}	7.2698×10^{-301}	6	4.0000	0.130910
	MJ	1.9695×10^{-97}	1.8892×10^{-388}	6	4.0000	0.181770
	MA	2.6180×10^{-50}	1.9998×10^{-199}	6	3.9998	0.159470
	MT	8.7298×10^{-48}	1.5851×10^{-189}	5	4.0003	0.132740
	MCL	1.0457×10^{-28}	2.2406×10^{-113}	5	4.0072	0.130590
	MCMJ	7.7282×10^{-52}	1.4748×10^{-205}	6	3.9998	0.144230
	MK	6.9412×10^{-33}	6.4621×10^{-130}	5	3.9963	0.104550
h_7 $x_0 = 3.0$	MMA	1.1004×10^{-33}	2.3890×10^{-134}	5	3.9995	0.076014
	MO	2.4153×10^{-25}	5.8076×10^{-101}	4	3.9971	0.064097
	MJ	9.0755×10^{-30}	1.5641×10^{-118}	4	3.9985	0.052947
	MA	3.3504×10^{-53}	5.9596×10^{-213}	5	3.9986	0.064213
	MT	2.4768×10^{-80}	6.3556×10^{-321}	5	4.0000	0.063681
	MCL	2.7944×10^{-69}	1.2480×10^{-276}	5	4.0000	0.078686
	MCMJ	2.1432×10^{-53}	1.1064×10^{-213}	5	3.9989	0.076512
	MK	9.0892×10^{-65}	7.4380×10^{-259}	5	4.0000	0.059983
h_8 $x_0 = 13.0$	MMA	1.4108×10^{-30}	6.4201×10^{-120}	6	3.9949	0.126550
	MO	2.0437×10^{-88}	2.0098×10^{-351}	7	4.0000	0.097632

Función	Método	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	Iteraciones	ACOC	Tiempo
h_9 $x_0 = 82.0$	MJ	1.2910×10^{-91}	3.1903×10^{-364}	7	4.0000	0.112390
	MA	5.4336×10^{-96}	7.5371×10^{-381}	8	4.0000	0.108790
	MT	1.2852×10^{-36}	1.3358×10^{-143}	7	3.9989	0.102940
	MCL	5.6190×10^{-54}	2.7130×10^{-213}	7	3.9999	0.105960
	MCMJ	2.0598×10^{-98}	1.5003×10^{-390}	8	4.0000	0.138610
	MK	2.5390×10^{-36}	2.0360×10^{-142}	7	3.9989	0.127610
	MMA	4.9953×10^{-53}	6.1911×10^{-215}	8	3.9998	0.186730
	MO	1.2703×10^{-74}	4.0476×10^{-301}	6	4.0000	0.080519
	MJ	4.5453×10^{-36}	3.0285×10^{-147}	5	3.9980	0.072154
	MA	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c
h_9 $x_0 = 82.0$	MT	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c
	MCL	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c
	MCMJ	n.c	n.c	n.c	n.c	n.c
	MK	3.7135×10^{-75}	5.5670×10^{-303}	18	4.0000	0.237690

Nota. Elaboración propia.

Tabla 10

Rendimiento numérico de métodos iterativos en ecuaciones no lineales para $x_0 \approx 10\zeta$ (4/4).

Función	Método	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	Iteraciones	ACOC	Tiempo
h_{10} $x_0 = 8.0$	MMA	1.1821×10^{-49}	3.2186×10^{-196}	6	3.9998	0.119880
	MO	3.1834×10^{-40}	1.2006×10^{-158}	6	3.9996	0.076242
	MJ	3.1834×10^{-40}	1.2006×10^{-158}	6	3.9996	0.082261
	MA	8.8374×10^{-51}	5.3888×10^{-200}	7	3.9999	0.082152
	MT	1.0900×10^{-72}	7.0617×10^{-288}	7	4.0000	0.096249
	MCL	4.4120×10^{-26}	1.0526×10^{-101}	6	3.9935	0.082702
	MCMJ	6.3478×10^{-52}	1.3826×10^{-204}	7	3.9999	0.099838
	MK	1.0900×10^{-72}	7.0617×10^{-288}	7	4.0000	0.083849

Nota. Elaboración propia.

En las Tablas 7, 8, 9 y 10, se muestran los resultados numéricos, pero tomando una estimación muy lejana a la raíz. Al realizar el experimento con la estimación inicial $x_0 \approx 10\zeta$, se puede apreciar que el método MMA(0.5) sigue sobresaliendo en algunas ecuaciones al requerir la menor cantidad de iteraciones. Por ejemplo, en las ecuaciones h_1, h_3, h_8 y h_{10} , el método MMA(0.5) necesita seis iteraciones junto con MO y MJ, por lo que tiene un desempeño competitivo respecto a los métodos clásicos y sobrepasa de los métodos MA, MT, MCL, MCMJ y MK. En el caso de la ecuación h_9 , la mayoría de los métodos presentan problemas de convergencia con excepción de MMA(0.5), MO, MJ y MK. Las limitaciones del método MMA(0.5) se evidencian en las funciones h_2 y h_9 : en el caso de la función h_2 el método necesita de 11 iteraciones para encontrar la solución aproximada, mientras que en h_9 no logra converger a la solución, lo mismo ocurre con el resto de los métodos para dicha ecuación.

Mediante las pruebas numéricas se pueden verificar los resultados del análisis de convergencia y de la dinámica compleja del operador racional $W(x; \alpha)$. En todos los casos el ACOC se aproxima a cuatro lo cual tiene concordancia con el orden de convergencia teórico demostrado en el Teorema 1. Al elegir dos parámetros distintos, en este caso $\alpha = 0$ y $\alpha = 10$, se evidencia la influencia que tienen sobre la convergencia hacia la solución aproximada de las ecuaciones no lineales.

Conclusiones

En este trabajo se construyó una nueva familia iterativa mediante la combinación de dos esquemas iterativos propuestos previamente. Al analizar el orden de convergencia detalladamente mediante desarrollo en series de Taylor, se demostró que el método tiene orden de convergencia cuatro sin importar que valor se le asigne al parámetro. Asimismo, dicha familia cumple en ser óptima en el sentido de Kung-Traub.

El análisis de la estabilidad permitió la obtención del operador racional y a su vez estudiar los puntos fijos y críticos. Con la construcción de los planos de parámetros y planos dinámicos, fue posible obtener información sobre las regiones que proporcionan métodos estables de la familia. Algunos valores estables identificados fueron $\alpha \in \{0, -1, 1, 2 - 2\}$; existen una infinidad de valores que dan lugar a métodos estables, siempre que se mantenga dentro del radio de convergencia en los planos de parámetros, pero algunos proporcionan una dinámica más compleja, aumentando la cantidad de puntos fijos extraños y puntos críticos libres.

En las pruebas numéricas se han podido corroborar los hallazgos del análisis de convergencia y de estabilidad, ya que el orden computacional aproximado era muy cercano a cuatro en los experimentos. Mientras que al elegir al seleccionar un parámetro estable y

otro inestable, se notaba una diferencia considerable en términos del número de iteraciones y los errores.

Una futura línea de investigación que se deriva de este trabajo es la implementación de la familia en el caso de sistemas de ecuaciones no lineales $F(X) = 0$, dado que hay problemas científicos que involucran más de una variable y es necesario plantear un sistema no lineal. Para ello, es necesario trabajar con la notación adaptada al caso multidimensional, el uso de vectores y matrices jacobianas, y de esta forma verificar que los resultados obtenidos para ecuaciones no lineales se extienden adecuadamente al trabajar en sistemas no lineales de dimensión $n > 1$.

Referencias

- Abu Ghalioun, N. y Zein, A. (2025). Optimal Fourth-Order Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations: An Innovative General Class with Stable Members and Engineering Applications. *Journal of Applied Analysis & Computation*, 15, pp. 3649-3676. <https://doi.org/10.11948/20250049>
- Artidiello, S. (2014). *Diseño, implementación y convergencia de métodos iterativos para resolver ecuaciones y sistemas no lineales utilizando funciones peso* [PhD thesis, Universitat Politècnica de València]. RiuNet Repositorio institucional UPV. <https://doi.org/10.4995/Thesis/10251/44230>
- Chicharro, F. I., Cordero, A. y Torregrosa, J. (2013). Drawing Dynamical and Parameters Planes of Iterative Families and Methods. *TheScientificWorldJournal*, 780153. <https://doi.org/10.1155/2013/780153>
- Cordero, A., G. Villalba, E., Torregrosa, J. y Triguero-Navarro, P. (2021). Convergence and Stability of a Parametric Class of Iterative Schemes for Solving Nonlinear Systems. *Mathematics*, 9, 86. <https://doi.org/10.3390/math9010086>
- Cordero, A., Leonardo Sepúlveda, M. y Torregrosa, J. (2022). Dynamics and Stability on a Family of Optimal Fourth-Order Iterative Methods. *Algorithms*, 15. <https://doi.org/10.3390/a15100387>
- Cordero, A., Ledesma, A., García Maimó, J. y Torregrosa, J. (2023). Design and Dynamical behavior of a fourth order family of iterative methods for solving nonlinear equations. *Research Square*. <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-2816390/v1>
- Cordero, A., Leonardo-Sepúlveda, M. A., Torregrosa, J. R. y Vassileva, M. P. (2024). Increasing in three units the order of convergence of iterative methods for solving nonlinear systems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 223, pp. 509-522. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378475424001666>
- Cordero, A. y Torregrosa, J. R. (2007). Variants of Newton's Method using fifth-order quadrature formulas. *Applied Mathematics and Computation*, 190(1), pp. 686-698. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.01.062>

- Hu, Y. y Fang, L. (2010). A seventh-order convergent Newton-type method for solving nonlinear equations. *2010 2nd International Conference on Computational Intelligence and Natural Computing, CINC 2010*, 2. <https://doi.org/10.1109/CINC.2010.5643798>
- Jarratt, P. (1969). Some efficient fourth order multipoint methods for solving equations. *BIT Numerical Mathematics*, 9(2), pp. 119-124. <https://doi.org/10.1007/BF01933248>
- Kou, J., Li, Y. y Wang, X. (2007). A composite fourth-order iterative method for solving non-linear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 184(2), pp. 471-475. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.05.181>
- Kung, H. T. y Traub, J. F. (1974). Optimal Order of One-Point and Multipoint Iteration. *Journal of the ACM (JACM)*, 21(4), pp. 643-651. <https://doi.org/10.1145/321850.321860>
- Moscoso Martínez, M., Chicharro, F. I., Cordero, A., Torregrosa, J. y Ureña-Callay, G. (2024). Achieving Optimal Order in a Novel Family of Numerical Methods: Insights from Convergence and Dynamical Analysis Results. *Axioms*, 13, 458. <https://doi.org/10.3390/axioms13070458>
- Ortega, J. M. y Rheinboldt, W. C. (1970). *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic Press. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-11263-9>
- Ostrowski, A. M. (1960). *Solution of Equations and Systems of Equations*. Academic Press. <https://doi.org/10.1002/zamm.19630430112>
- Petković, M., Neta, B., Petković, L. y Dzunic, J. (2013). *Two-point methods* (pp. 27-83). Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-397013-8.00002-9>
- Tassaddiq, A., Qureshi, S., Argyros, I. K., Chicharro, F. I., Soomro, A., Nizamani, P. y Hincal, E. (2025). A convergent and stable fourth-order iterative procedure based on Kung-Traub conjecture for nonlinear systems. *Applied Numerical Mathematics*, 214, pp. 54-79. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2025.03.003>
- Thota, S. y Shanmugasundaram, P. (2022). On new sixth and seventh order iterative methods for solving non-linear equations using homotopy perturbation technique. *BMC Research Notes*, 15(1), 267. <https://doi.org/10.1186/s13104-022-06154-5>
- Traub, J. F. (1964). *Iterative Methods for the Solution of Equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Zein, A. (2024). A New Family of Optimal Fourth-Order Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations With Applications. *Journal of Applied Mathematics*, (1), 9955247. <https://doi.org/10.1155/2024/9955247>