



Medida del comportamiento de la constante dieléctrica para bajas densidades de dióxido de carbono (CO_2) por medio de levitación eléctrica y comparación con la relación de Clausius-Mossotti.

Measurement of the behavior of the dielectric constant for low densities of carbon dioxide (CO_2) by means of electrical levitation and comparison with the Clausius-Mossotti relation.

L. VILLANUEVA¹

Recibido: 08 de marzo de 2021 / Aceptado: 15 de junio de 2021

¹Departamento de Gravitación, Altas Energías y Radiaciones, Escuela de Física. Universidad Nacional Autónoma de Honduras.
lucio.villanueva@unah.edu.hn

RESUMEN

Se presentan los resultados de las mediciones realizadas de la constante dieléctrica a bajas concentraciones de dióxido de carbono a temperatura constante, la forma en que la esta constante depende de la concentración nos proporciona información respecto a la estructura de los materiales y propiedades de los mismos. Clausius-Mossotti obtuvieron teóricamente una función que relaciona propiedades microscópicas de los materiales con la constante dieléctrica que es una propiedad macroscópica. Se compararon los resultados de las mediciones obtenidas por el experimento con la relación de Clausius-Mossotti, obteniéndose una relación entre constante dieléctrica y concentración a bajas densidades.

ABSTRACT

The results of the measurements made of the dielectric constant at low concentrations of carbon dioxide at constant temperature are presented, the way in which this constant depends on the concentration provides us with information regarding the structure of the materials and their properties. Clausius-Mossotti theoretically obtained a function that relates microscopic properties of materials with the dielectric constant, which is a macroscopic property. The results of the measurements obtained by the experiment were compared with the Clausius-Mossotti relationship, obtaining a relationship between dielectric constant and concentration at low densities.

PALABRAS CLAVES

dieléctrico, constante dieléctrica, ecuación de Clausius-Mossotti, polarización

KEYWORDS

dielectric, dielectric constant, Clausius-Mossotti equation, polarization

* Esta obra está bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento - NoComercial 4.0 Internacional

* This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

I | INTRODUCCIÓN

La mayoría de las propiedades dieléctricas de los materiales se describen en términos de la permitividad dieléctrica y los momentos dipolares moleculares de las sustancias en campos locales y no locales. La permitividad dieléctrica, a menudo llamada la constante dieléctrica, es una propiedad medible. El momento dipolar molecular medido a partir de la constante dieléctrica del material depende de la interacción de un átomo o molécula con su vecino y, por lo tanto, proporciona información valiosa sobre la estructura molecular. La constante dieléctrica depende de cuán polarizable sea un material y la frecuencia del campo aplicado. La caída de la polarizabilidad se relaciona con la disminución de la constante dieléctrica y la aparición de la absorción de energía eléctrica que constituye la dispersión dieléctrica en el material.

Desde el inicio de la ciencia y tecnología de los fenómenos eléctricos se han utilizados materiales aislantes que se oponen al flujo de corriente en un circuito eléctrico. Los dieléctricos son materiales aislantes que exhiben la propiedad de polarización eléctrica; de este modo modifican la función dieléctrica de un vacío. El primer condensador fue construido por Cunaeus y Musschenbroek en 1745, que fue conocido como la Botella de Leyden (Musschen Broek, 1762). Pero no hubo estudios sobre las propiedades de los materiales aislantes hasta 1837 cuando Michael Faraday publicó las primeras mediciones numéricas de estos materiales, a las que llamó dieléctricos (Faraday, 1837). Faraday encontró que la capacidad de un condensador dependía de la naturaleza del material que separa la superficie conductora. Este descubrimiento alentó estudios empíricos adicionales de materiales aislantes, dirigidos a maximizar la cantidad de carga que puede ser almacenada por un capacitor. A lo largo de la mayor parte del siglo XIX, los científicos que buscan materiales aislantes para las aplicaciones se volvieron cada vez más preocupadas por el mecanismo físico detallado que gobierna el comportamiento de estos materiales. En contraste con el aspecto del aislamiento, los fenómenos dieléctricos se han vuelto más generales y fundamentales, ya que se originan a partir de la polarización dieléctrica.

Mossotti (Mossoti, 1847, 1850) y Clausius (Clausius, 1879) realizaron una investigación sistemática sobre las propiedades dieléctricas de los materiales. Pretendieron y lograron correlacionar la capacidad inductiva específica, una característica macroscópica del aislante introducido por Faraday, que ahora se denomina como la constante dieléctrica, con la estructura microscópica del material.

La constante dieléctrica del dióxido de carbono (CO_2) se ha medido en un amplio rango de temperaturas y densidades. Se ha encontrado que la función de Clausius-Mossotti, aunque independiente de la temperatura aumenta lentamente a medida que aumenta la densidad a presiones altas (Keyes y Kirkwood, 1930).

El propósito del presente trabajo es describir en términos comparativos, la forma en que la constante dieléctrica varía con densidades relativamente bajas del dióxido de carbono (CO_2). Se pretende determinar el comportamiento de la constante dieléctrica del dióxido de carbono utilizando un capacitor de placas paralelas, mediante levitación generada por una diferencia de potencial de una hoja delgada de aluminio y posteriormente agregando un dieléctrico en el cual se pueda cambiar y controlar su concentración para realizar diferentes medidas, los valores de la permitividad varían ya que al existir materia de por medio esta influye en las propiedades del capacitor.

Posteriormente, se compara los resultados obtenidos con la relación de Clausius-Mossotti.

II | LEY DE COULOMB

El físico francés Charles Coulomb investigó en la década de 1780 la relación cuantitativa de las fuerzas eléctricas entre objetos cargados. La ley que lleva su nombre la demostró usando una balanza de torsión, que él mismo inventó, identificando cómo varía la fuerza eléctrica en función de la magnitud de las cargas y de la distancia entre ellas (Coulomb, 1788), sus resultados expresados en forma de ecuación es:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

Donde ϵ_0 es la constante conocida como permitividad en el espacio libre o vacío y su valor es $8.8541878128 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$ (NIST, 2019). El campo eléctrico se define $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}$, donde q_0 es una carga de prueba. Cuando existe un medio diferente al vacío por ejemplo aire, dióxido de carbono, etc. la expresión para el campo eléctrico queda

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1}{r^2} \hat{r}$$

Donde ϵ es la capacidad inductiva específica o permitividad absoluta del medio.

Un dieléctrico es un material con una baja conductividad eléctrica ($\sigma \ll 1$); es decir, un aislante, el cual tiene la capacidad de formar dipolos eléctricos en su interior bajo la acción de un campo eléctrico externo. De esta manera, todos los materiales dieléctricos son aislantes, pero no todos los materiales aislantes son dieléctricos.

III | TEORÍA DE LOS DIELECTRICOS

En esta sección se presenta una breve descripción de la interpretación atómica de las propiedades de los materiales dieléctricos, sobre la base de la teoría clásica (No se considera tópicos de mecánica cuántica en este trabajo¹). En este trabajo nos ocupamos esencialmente de la constante dieléctrica estática, la dependencia de la constante dieléctrica y las pérdidas dieléctricas.

1 | Susceptibilidad eléctrica y permitividad

Aunque Cunaeus y Musschenbroek (Musschen Broek, 1762) desarrollaron el primer capacitor, fue Michael Faraday (Faraday, 1837) quien notó por primera vez que cuando un capacitor de valor C_0 bajo vacío se llena con un material dieléctrico, su capacidad de almacenamiento de carga (capacitancia) aumenta a un valor de C . La relación χ_e del aumento de capacitancia $\Delta C = C - C_0$ a su capacitancia inicial C_0 es,

$$\chi_e = \frac{C - C_0}{C_0} = \frac{\Delta C}{C_0}$$

Donde χ_e se llama la susceptibilidad eléctrica del material. La terminología más utilizada es la capacidad inductiva específica relativa, conocida también como permeabilidad magnética relativa o la constante dieléctrica en lugar de la susceptibilidad, la constante dieléctrica se define como la relación de la

¹ En este trabajo solo utilizamos modelos clásicos sencillos de las propiedades moleculares, un tratamiento adecuado tendría necesariamente que hacer uso de tópicos de mecánica cuántica, afortunadamente, las propiedades más sencillas de los materiales dieléctricos son asequibles a un análisis clásico.

capacitancia C del capacitor lleno con un dieléctrico al valor C_0 del mismo capacitor en vacío.

$$\epsilon_r = \frac{C}{C_0}$$

De las ecuaciones anteriores, la relación entre la susceptibilidad eléctrica y la constante dieléctrica se da como:

$$\chi_e = \epsilon_r - 1 \quad (1)$$

Así, por definición, la susceptibilidad eléctrica y la constante dieléctrica son cantidades reales sin dimensiones. La constante dieléctrica es la medida de la medida en que la distribución de carga eléctrica en el material se puede distorsionar o polarizar mediante la aplicación de un campo eléctrico externo.

2 | Mecanismo de polarización eléctrica.

En el nivel atómico, toda la materia consiste, en última instancia, en partículas cargadas positiva y negativamente, cuyas cargas se equilibran entre sí macroscópicamente en ausencia de un campo eléctrico, dando lugar a una neutralidad de carga global. Una vez que se aplica el campo eléctrico, los balances de carga se ven perturbados por los siguientes cuatro mecanismos básicos de polarización (Smyth, 1966):

- **Polarización electrónica:** Ocurre en átomos neutros cuando un campo eléctrico desplaza el núcleo con respecto a la carga negativa. Así, la polarización electrónica es un efecto de polarización inducida.
- **Polarización atómica / iónica:** se observa cuando diferentes átomos que comprenden una molécula comparten sus electrones de forma asimétrica y hacen que la nube de electrones se desplace hacia el átomo de unión más fuerte, los átomos adquieren cargas de polaridad opuesta y un campo externo que actúa sobre estas cargas netas. tiende a cambiar las posiciones de equilibrio de los propios átomos, lo que lleva a la polarización atómica.
- **Polarización dipolar / orientativa:** cuando se forma un enlace iónico entre dos moléculas por la transferencia de algunos electrones de valencia, se originará un momento dipolar permanente en ellos. Este momento dipolar permanente es igual al producto de las cargas de los electrones de valencia transferidos y la distancia interatómica entre ellos. En presencia de un campo eléctrico \mathbf{E} , las moléculas que llevan un momento dipolar permanente se orientarán para alinearse a lo largo de la dirección del campo eléctrico \mathbf{E} . Este proceso se denomina polarización dipolar u orientativa. Esto ocurre solo en materiales dipolares que poseen momentos dipolares permanentes.
- **Polarización de la carga espacial:** está presente en materiales dieléctricos que contienen portadores de carga que pueden migrar una cierta distancia a través de la mayor parte del material (a través de la difusión, la conducción iónica rápida o el salto, etc.) creando una distorsión de campo macroscópica. Tal distorsión le parece a un observador externo un aumento en la capacitancia de la muestra y puede ser indistinguible del aumento real de la permitividad dieléctrica. La polarización de la carga espacial es el único tipo de polarización eléctrica que se acompaña de un transporte de carga macroscópico (y en el caso de que los portadores de carga migratorios sean también iones un transporte de masa macroscópico). En general, las polarizaciones de carga espacial pueden agruparse en polarización de salto y polarización interfacial. En los materiales dieléctricos, las cargas localizadas (iones y vacantes, o electrones y agujeros) pueden saltar de un sitio a otro, lo que crea la polarización del salto. De manera similar, la separación de las cargas positivas y negativas móviles bajo un campo eléctrico puede producir una polarización interfacial.

3 | Teoría del campo eléctrico local.

Debido a que la carga no puede fluir libremente en los materiales aislantes, los campos eléctricos aplicados de varias intensidades pueden penetrar en sus interiores. Hay al menos tres contextos amplios en los que es importante saber cómo la estructura interna de un aislante, tanto electrónico como iónico, se reajusta cuando un campo eléctrico adicional se superpone en el campo eléctrico asociado con el potencial reticular periódico (Ashcroft y Mermin, 1976):

- 1 Podemos colocar una muestra del aislante en un campo eléctrico estático como el existente entre el lugar de un condensador. Se pueden deducir muchas consecuencias importantes de la distorsión interna resultante si se conoce la constante dieléctrica estática ϵ del cristal, cuyo cálculo es, por lo tanto, un objetivo importante de cualquier teoría microscópica de los materiales aislantes (Nuestro objeto de estudio).
- 2 Podemos estar interesados en las propiedades ópticas del aislante, es decir, en su respuesta al campo eléctrico de AC asociado con radiación electromagnética. En este caso, la cantidad importante a calcular es la constante dieléctrica dependiente de la frecuencia $\epsilon(\omega)$, o, equivalentemente, el índice de refracción, $n = \sqrt{\epsilon}$.
- 3 En un cristal iónico, incluso en ausencia de campos aplicados externamente, puede haber fuerzas electrostáticas de largo alcance entre los iones además del potencial reticular periódico, cuando la red se deforma de su configuración de equilibrio (como, por ejemplo, en el curso de ejecutar un modelo normal). A menudo, estas fuerzas se abordan mejor considerando el campo eléctrico adicional que les confiere un valor, cuyas fuentes son intrínsecas al cristal.

Al tratar con cualquiera de estos fenómenos, la teoría de las ecuaciones macroscópicas de Maxwell en un medio es la herramienta más valiosa.

Para explorar la electrostática macroscópica, se requiere una teoría que relacione la densidad de polarización \mathbf{P} con el campo eléctrico macroscópico aplicado \mathbf{E} . Dado que cada molécula tiene dimensiones microscópicas, su desplazamiento y distorsión estarán determinados por la fuerza debida al campo microscópico en la posición de la molécula, disminuido por la contribución al campo microscópico de la molécula misma. Este campo se denomina frecuentemente campo local (o efectivo), \mathbf{E}_{loc} (Ashcroft y Mermin, 1976). En los medios menos densos (enrarecidos, en el que las moléculas están muy separadas, hay poca diferencia entre el campo macroscópico y el campo local que actúa sobre la molécula o grupo de moléculas. Pero en los medios densos, por ejemplo, cristales y líquidos, las moléculas están muy próximas entre sí, la polarización de las moléculas vecinas da lugar a un campo eléctrico interno o local \mathbf{E}_{loc} que actúa sobre la molécula dada además del campo medio macroscópico \mathbf{E} , de modo que el campo total sobre la molécula es $\mathbf{E} + \mathbf{E}_{loc}$. Según (Jackson, 1999), podemos expresar el campo local como la diferencia de dos términos:

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E}_{prox} - \mathbf{E}_p \quad (2)$$

donde \mathbf{E}_{prox} es la contribución real de las moléculas próximas a la dadas y \mathbf{E}_p es la contribución de aquellas moléculas que se tratan mediante la aproximación de considerarlas un conjunto promediado descrito por la polarización \mathbf{P} . En otras palabras, en las proximidades de la molécula de interés, tomamos en cuenta la configuración atómica específica y las posiciones de las moléculas vecinas.

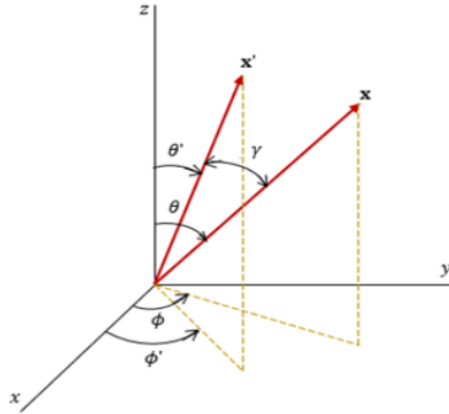


Figura 1: Vector posición \mathbf{x} campo y vector posición \mathbf{x}' fuente

Suponiendo un cierto volumen V macroscópicamente pequeño, pero microscópicamente grande. Se puede calcular \mathbf{E}_p utilizando la integral de volumen del campo eléctrico en el interior de un volumen esférico V de radio R que contiene una distribución de carga.

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x = - \int_{r < R} \nabla \phi(\mathbf{x}) d^3x \quad (3)$$

Donde $\phi(\mathbf{x})$ es el potencial escalar y depende de la posición:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (4)$$

Esta ecuación puede convertirse en una integral extendida a la superficie de la esfera:

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x = - \int_{r=R} R^2 d\Omega \phi(\mathbf{x}) \mathbf{n} \quad (5)$$

donde se ha utilizado la identidad,

$$\int_{r=R} u d\mathbf{a} \mathbf{n} = \int_V (\nabla u) d^3x$$

con $u = \phi(\mathbf{x})$, \mathbf{n} el vector normal dirigida hacia fuera de la superficie ($\mathbf{n} = \mathbf{x}/R$) y $da = R^2 d\Omega$, siendo $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ el diferencial angular en coordenadas esféricas. Si sustituimos (4) en (3) nos queda:

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x = - \frac{R^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(x') \int_{r=R} d\Omega \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (6)$$

Para realizar la integración angular se observa en primer lugar que \mathbf{n} puede escribirse en función de los ángulos (θ, ϕ) de las coordenadas esféricas,

$$\mathbf{n} = \hat{x} \sin\theta \cos\phi + \hat{y} \sin\theta \sin\phi + \hat{z} \cos\theta$$

Las diferentes componentes de \mathbf{n} son combinaciones lineales de los armónicos esféricos (Y_{lm}) exclusivamente con $l = 1$, como se demuestra a continuación:

$$n_x = aY_{1m}^* + aY_{1m} = a(Y_{11}^* + Y_{11})$$

donde a es una constante arbitraria

$$n_x = a \left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \text{sen } \theta e^{-i\phi} \right) + a \left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \text{sen } \theta e^{i\phi} \right)$$

$$n_x = a \left[-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \text{sen } \theta (\cos \phi - i \text{sen } \phi) \right] + a \left[-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \text{sen } \theta (\cos \phi + i \text{sen } \phi) \right]$$

$$n_x = -2a \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \text{sen } \theta \cos \phi$$

si $a = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}}$, entonces $n_x = \text{sen } \theta \cos \phi$, haciendo lo mismo para n_y

$$n_y = b(Y_{11}^* - Y_{11})$$

donde b es una constante arbitraria

$$n_y = b \left[-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \text{sen } \theta (\cos \phi - i \text{sen } \phi) \right] - b \left[-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \text{sen } \theta (\cos \phi + i \text{sen } \phi) \right]$$

$$n_y = 2bi \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \text{sen } \theta \text{sen } \phi$$

si $b = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}}$, entonces $n_y = \text{sen } \theta \text{sen } \phi$, haciendo lo mismo para n_z

$$n_z = cY_{10} = c \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

donde c es una constante arbitraria, si $c = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}$, entonces $n_z = \cos \theta$, escribiendose

$$\mathbf{n} = \hat{x}n_x + \hat{y}n_y + \hat{z}n_z$$

como

$$\mathbf{n} = \hat{x}a [Y_{11}^*(\theta, \phi) + Y_{11}(\theta, \phi)] + \hat{y}b [Y_{11}^*(\theta, \phi) - Y_{11}(\theta, \phi)] + \hat{z}cY_{10}(\theta, \phi)$$

Por el teorema de adición de los armónicos esféricos (Jackson, 1999), podemos sustituir

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (7)$$

donde $r_<$ es el menor y $r_>$ es el mayor de los $|\mathbf{x}|$ y $|\mathbf{x}'|$. Tomando la integral angular:

$$\int_{r=R} d\Omega \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \int d\Omega \{ \hat{x}a [Y_{11}^*(\theta, \phi) + Y_{11}(\theta, \phi)] + \hat{y}b [Y_{11}^*(\theta, \phi) - Y_{11}(\theta, \phi)] + \hat{z}cY_{10}(\theta, \phi) \} \dots$$

$$\dots \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{8}$$

la condición de ortogonalidad y normalización de los armónicos esféricos Y_{lm} es

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm} \tag{9}$$

y nos asegura que desaparecen todos los términos de la serie de (??) salvo el $l = 1$, ya que las diferentes componentes de \mathbf{n} se definieron exclusivamente para $l = 1$, como se mostro anteriormente.

Se puede también expresar $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ por medio de los *Polinomios de Legendre* $P_l(x)$ de la manera siguiente

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos\gamma) \tag{10}$$

como se puede ver en la figura 1, $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi')$. Considerando que solo los términos para $l = 1$ de la sumatoria nos intereza ya que los demás términos desaparecen, entonces tenemos:

$$P_1(\cos\gamma) = P_1(\cos\gamma) = \cos\gamma \tag{11}$$

entonces, la integral angular nos queda:

$$\int_{r=R} d\Omega \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \int d\Omega \mathbf{n} \cos\gamma \tag{12}$$

expandiendo la integral, tenemos:

$$\int d\Omega \mathbf{n} \cos\gamma = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta (\hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta) [\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi')]$$

desarrollando la integral se obtiene:

$$\int d\Omega \mathbf{n} \cos\gamma = \frac{4\pi}{3} (\hat{x}\sin\theta'\cos\phi' + \hat{y}\sin\theta'\sin\phi' + \hat{z}\cos\theta') = \frac{4\pi}{3} \mathbf{n}' \tag{13}$$

donde $\mathbf{n}' = (\hat{x}\sin\theta'\cos\phi' + \hat{y}\sin\theta'\sin\phi' + \hat{z}\cos\theta')$. Por lo tanto (3) nos queda:

$$\int_{r<R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x = -\frac{R^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \rho(x') \left[\frac{r_{<}}{r_{>}^2} \left(\frac{4\pi}{3} \mathbf{n}' \right) \right] \tag{14}$$

en la que $r_{<} = r' = x'$ y $r_{>} = R$ quedando:

$$\int_{r<R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x = -\frac{1}{3\epsilon_0} \int d^3x' \rho(x') x' \mathbf{n}' \tag{15}$$

La integral de volumen del campo eléctrico en el volumen de la esfera resulta ser:

$$\int_{r < R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (16)$$

siendo $\mathbf{p} = \int d^3x' \rho(x') \mathbf{x}'$ el momento dipolar eléctrico de la distribución de carga con respecto al centro de la esfera.

Como se menciono anteriormente, si se escoge el volumen V como una esfera de radio R que contiene muchas moléculas, el momento dipolar total en su interior es:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_V \mathbf{P}(\mathbf{x}) d^3x = \mathbf{P} \int_V d^3x \\ \mathbf{p} &= \frac{4\pi R^3}{3} \mathbf{P} \end{aligned}$$

donde \mathbf{P} es la polarización y se ha supuesto que V es lo bastante pequeño para que la polarización sea esencialmente constante en todo el volumen. Para encontrar \mathbf{E}_p , utilizaremos el valor del campo eléctrico medio dentro de la esfera y este esta dado por el teorema del valor medio para integrales:

$$\int_D \mathbf{f}(x, y, z) d^3x = \mathbf{f}(x_0, y_0, z_0) G(D)$$

Donde $G(D)$ denota el volumen V de la esfera, en este caso $\mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{E}$ y $\mathbf{f}(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{E}_p$

$$\mathbf{E}_p = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{r < R} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x \quad (17)$$

Sustituyendo (16) en (17), tenemos:

$$\mathbf{E}_p = \frac{3}{4\pi R^3} \left(-\frac{\mathbf{p}}{3\epsilon_0} \right)$$

y sustituyendo también $\mathbf{p} = \frac{4\pi R^3}{3} \mathbf{P}$

$$\mathbf{E}_p = -\frac{1}{4\pi R^3 \epsilon_0} \left(\frac{4\pi R^3}{3} \mathbf{P} \right)$$

quedando al final

$$\mathbf{E}_p = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (18)$$

que es lo que se deseabamos encontrar.

Por lo tanto con (18), el campo local (2) puede escribirse como:

$$\mathbf{E}_{loc} = \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} + \mathbf{E}_{prox} \quad (19)$$

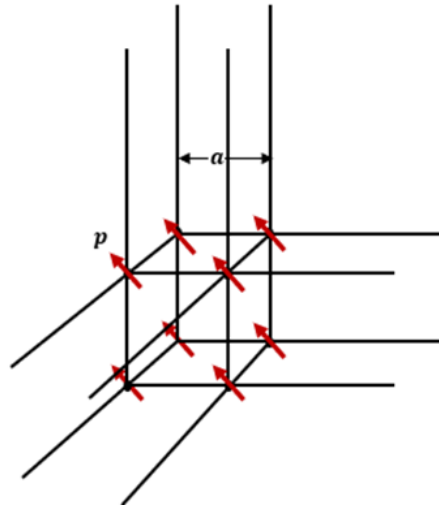


Figura 2: Cálculo de la contribución de las moléculas cercanas al campo interno en el caso de una red cúbica simple

El campo debido a las moléculas cercanas es más difícil de determinar Lorentz logro demostrar (Jackson, 1999), que para átomos en una red cúbica simple \mathbf{E}_{prox} se anula en cualquier punto del retículo cristalino.

El argumento que utilizado se basa en la simetría del problema, si suponemos que en el interior de la esfera que tomamos anteriormente, tenemos una ordenación cúbica de dipolos, tales como los dibujados en la figura 2, con todos sus momentos de valor constante y orientados según la misma dirección (recordando que la esfera que tomamos es macroscópicamente pequeña, pero contiene muchísimas moléculas). Las posiciones de los dipolos vienen dadas por las coordenadas \mathbf{x}_{ijk} con componentes a lo largo de los tres ejes (ia, ja, ka); siendo a el espacio del retículo cúbico y los índices i, j, k toman cada uno valores enteros positivos o negativos. El campo total debido a todos los dipolos en el origen es:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j,k} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_{ijk})\mathbf{x}_{ijk} - x_{ijk}^2 \mathbf{p}}{x_{ijk}^5} \quad (20)$$

La componente x podemos escribirla en la forma:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{ijk} \frac{3(i^2 p_1 + ij p_2 + ik p_3) - (i^2 + j^2 + k^2) p_1}{a^3 (i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} \quad (21)$$

Como los índices recorren los mismos valores positivos y negativos, los términos cruzados que contienen $(ij p_2 + ik p_3)$ se anulan. Por razones de simetría, las tres sumas:

$$\sum_{ijk} \frac{i^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} = \sum_{ijk} \frac{j^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} = \sum_{ijk} \frac{k^2}{(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}}$$

son iguales, y, por consiguiente, tenemos:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{ijk} \frac{[3i^2 - (i^2 + j^2 + k^2)]p_1}{a^3(i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}} = 0 \quad (22)$$

Por el mismo procedimiento se demuestra que también se anulan las componentes en y y en z . Luego $\mathbf{E}_{prox} = 0$ para una red cúbica simple.

Si $\mathbf{E}_{prox} = 0$ para una situación altamente simétrica, es de esperar que sea también cero para situaciones completamente desordenadas al azar (como es nuestro caso). según (Ashcroft y Mermin, 1976), esperamos que las sustancias amorfas tampoco tengan campo local debido a las moléculas próximas. Para otras redes distintas de la cúbica simple, las componentes de \mathbf{E}_{prox} están relacionadas con las componentes de \mathbf{P} por intermedio del tensor de traza nula $s_{\alpha\beta}$ que tiene las propiedades de simetría de la red. No obstante, para la mayoría de los materiales tomar $\mathbf{E}_{prox} = 0$ es una buena hipótesis de trabajo.

Por lo tanto, de (19) deducimos que

$$\mathbf{E}_{loc} = \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (23)$$

4 | Polarización y constante dieléctrica

En presencia de mecanismos de polarización electrónicos, iónicos y dipolares, el momento dipolar inducido promedio por molécula \mathbf{p}_{av} será la suma de todas las contribuciones en términos del campo local (campo efectivo) que actúa sobre cada molécula individual.

$$\mathbf{p}_{av} = \alpha_e \mathbf{E}_{loc} + \alpha_i \mathbf{E}_{loc} + \alpha_d \mathbf{E}_{loc} \quad (24)$$

Donde, α_e , α_i , α_d son las polarizabilidades electrónicas, iónicas y dipolares respectivamente, la polarizabilidad se define como la facilidad que presenta la molécula para poder ser distorsionado por un campo eléctrico. Como ya se mencionó \mathbf{E}_{loc} es el campo local o el campo efectivo en el sitio de una molécula individual que causa la polarización individual. Cada efecto se agrega linealmente al momento dipolar neto de la molécula. La polarización interfacial no se puede agregar simplemente a la polarización total como $\alpha_{ij} \mathbf{E}_{loc}$, porque ocurre en las interfaces y no se puede colocar en una polarización promedio por molécula en el volumen. Además, los campos no están bien definidos en las interfaces.

Para dieléctricos simples (por ejemplo gases, que es la sustancia de estudio en este trabajo) se puede considerar que el campo local es el mismo que el campo macroscópico. Esto significa que \mathbf{E}_{loc} es igual al campo aplicado \mathbf{E} , y por lo tanto la polarización es,

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (25)$$

Se define como **Polarización** a la capacidad de un material dieléctrico para almacenar energía eléctrica bajo la influencia de un campo eléctrico, resultando por la separación y alineación de las cargas eléctricas inducida por el campo (Sagadevan, Sundaram, y Sastha, 2014).

La polarización ocurre cuando el campo eléctrico causa una separación de las cargas positivas y negativas en el material. Cuanto mayor sean la distancia del momento dipolar de esta separación de carga en la dirección de un campo y cuanto mayor sea el número de estos dipolos, mayor será la permitividad dieléctrica del material.

La polarización total del volumen seleccionado es $\mathbf{P} = N\mathbf{p}_{av}$, donde N es el número de átomos o molécula por unidad de volumen (Rodebush y Eddy, 1940), podemos escribir (24) como.

$$\mathbf{p}_{av} = (\alpha_e + \alpha_i + \alpha_d)\mathbf{E}_{loc} = (\alpha_e + \alpha_i + \alpha_d)\mathbf{E} = \alpha\mathbf{E}$$

donde α es igual a la suma de las contribuciones de las polarizabilidades electrónicas, iónicas y dipolares respectivamente y la llamaremos polarizabilidad de la molécula, en otras palabras $\alpha = \alpha_e + \alpha_i + \alpha_d$. De (25) tenemos que

$$\mathbf{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0\mathbf{E} = \alpha N\mathbf{E}$$

Despejando, llegamos al resultado

$$\epsilon_r = 1 + \frac{N\alpha}{\epsilon_0} \quad (26)$$

donde ϵ_r es la constante dieléctrica.

5 | Relación de Clausius-Mossotti para la permitividad dieléctrica.

Considere una molécula de un medio dieléctrico situado en un campo eléctrico uniforme \mathbf{E} . Como se determino en (26), el campo eléctrico local está dado por:

$$\mathbf{E}_{loc} = \frac{1}{3\epsilon_0}\mathbf{P}$$

El vector polarización \mathbf{P} se define como

$$\mathbf{P} = N \langle \mathbf{p}_{mol} \rangle \quad (27)$$

donde $\langle \mathbf{p}_{mol} \rangle$ es el momento dipolar medio de las moléculas. Este momento dipolar es aproximadamente proporcional al campo eléctrico que actúa sobre la molécula, como se muestra entre (27) y (29). Donde α es la polarizabilidad de la molécula y se define como la razón del momento dipolar medio de las moléculas al campo aplicado sobre las molécula. Tomando en cuenta el campo local

$$\langle \mathbf{p}_{mol} \rangle = \alpha(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{loc}) \quad (28)$$

siendo α una función del campo eléctrico, aunque para un amplio margen α es una constante que caracteriza la respuesta de las moléculas al campo aplicado.

Combinando (28) con (27) y (26) tenemos:

$$\mathbf{P} = N\alpha\left(\mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0}\mathbf{P}\right) \quad (29)$$

donde se ha supuesto que $\mathbf{E}_{prox} = 0$. Despejando para \mathbf{P} en función de \mathbf{E} y recordando (25) que define la susceptibilidad de una sustancia por medio de la polarización, se encuentra:

$$\epsilon_0\chi_e = \frac{N\alpha}{1 - \frac{1}{3\epsilon_0}N\alpha} \quad (30)$$

como la relación entre la susceptibilidad (parametro macroscópico) y la polarizabilidad (parámetro microscópico). Recordando que $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 = (1 + \chi_e)$, la constante dieléctrica puede expresarse en función de α

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{N} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right) \quad (31)$$

Esta se conoce como la ecuación de Clausius-Mossotti (Clausius, 1879).²

Para dieléctricos no polares, podemos escribir la ecuación de Clausius-Mossotti (Sagadevan y cols., 2014) y reordenando los términos, nos queda:

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{1}{3\epsilon_0} (N_m \alpha_{ind}) \quad (32)$$

Donde α_{ind} es la polarizabilidad inducida, esta relación se conoce como la ecuación de Clausius - Mossotti para dieléctricos no polares.

IV | CAPÍTULO III: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

1 | Levitación Eléctrica

Se quiere igualar la Fuerza de atracción gravitacional con la fuerza eléctrica en una hoja de aluminio. La fuerza gravitacional es justamente el peso de la hoja de aluminio. La densidad del aluminio ρ es igual a 2.7 gramos/centímetros cúbicos $2.7 \times 10^3 \text{Kg}/\text{m}^3$ (Sagadevan y cols., 2014). El volumen de una hoja de aluminio viene dado por su área, A_f , y su espesor, t .

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{F}_e \quad (33)$$

La fuerza de atracción gravitacional (\mathbf{F}_g), está dada por:

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g} = \rho t A_f \mathbf{g} \quad (34)$$

donde ρ es la densidad del material.

Para encontrar la fuerza eléctrica (\mathbf{F}_e) de las hojas de aluminio que se localizaran entre los platos de un capacitor eléctrico paralelo. Necesitamos encontrar el campo eléctrico entre las placas del capacitor y este está dado por V/d donde V es la amplitud del voltaje y d es la separación entre las dos placas. Pero vamos a suponer que el campo se concentra en la región de las dos placas. De (Wangsness, 1986) tomamos, para capacitores con dimensiones de área de los platos lo suficientemente grandes en comparación con la separación entre las placas se sabe que el campo entre las placas es:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z} \quad (35)$$

Donde σ es la densidad superficial de carga, ϵ_0 es la permitividad del vacío y \hat{z} es la dirección del campo eléctrico como se muestra en la figura (3). La magnitud del campo eléctrico es:

²La relación de Clausius-Mossotti deducida esta definida en SI de medidas, para ver la ecuación en otros sistemas ver Introduction to Solid State Physics del autor Charles Kittel, 8va. edición, pag. 464.

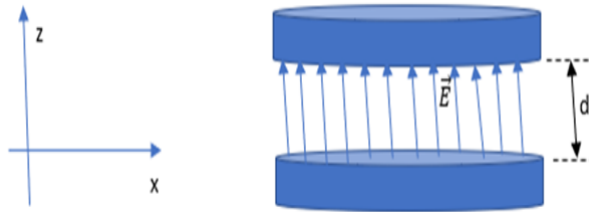


Figura 3: Campo Eléctrico de un capacitor de placas paralelas

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Despejando para σ tenemos:

$$\sigma = \epsilon_0 E$$

Sustituyendo $E = V/d$ tenemos:

$$\sigma = \epsilon_0 \frac{V}{d} \quad (36)$$

Como la hoja de aluminio estará en contacto con una de las placas del capacitor, al ser un buen material conductor este absorberá la misma carga de la placa del capacitor en el cual esta sostenida y se sentirá atraída por la carga de la otra placa. Para una sola placa del capacitor, por ejemplo, en la placa superior la magnitud del campo eléctrico es:

$$E_{up} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{V}{2d}$$

Encontrando la fuerza eléctrica que hace la placa superior sobre la hoja de aluminio, se utiliza la ley de Coulomb, la cual nos dice que el campo eléctrico es la fuerza eléctrica que experimenta una carga dividida entre el valor de la carga eléctrica del material $E_{up} = \frac{F_e}{Q_{alum.}}$, despejando para la fuerza eléctrica y sustituyendo el campo eléctrico ya conocido y también sabiendo que la carga eléctrica $Q_{alum.} = \sigma A_f$ tenemos:

$$F_e = Q_{alum.} E_{up} = \sigma A_f \frac{V}{2d} \quad (37)$$

Sustituyendo la ecuación (36) en la ecuación (37) obtenemos

$$F_e = \frac{\epsilon_0 V^2 A_f}{2d^2} \quad (38)$$

Igualando la magnitud de la fuerza de gravedad ecuación (34) y con lamagnitud de la fuerza eléctrica ecuación (38), se observa que:

$$\frac{\epsilon_0 V^2 A_f}{2d^2} = \rho t A_f g \quad (39)$$

A_f se cancela, despejando para el voltaje V^2 obtenemos:

$$V^2 = \left(\frac{2\rho g d^2}{\epsilon_0} \right) t \quad (40)$$

Descripción	Símbolo	Valor	Fuente
Espesor de una lámina de aluminio	t	$7.8 \times 10^{-6}m \pm 2\mu m$	(Kerry, 2012)
Densidad del aluminio	ρ	$2.70 \times 10^3 Kg/m^3$	(NIST, 2019)
Aceleración de la gravedad en CU	g	$(9.780 \pm 0.003)m/s^2$	(Tenorio y Espinoza, 2007)
Separación entre las placas	d	$(11.30 \pm 0.01)mm$	Medido en el laboratorio

Tabla 1: Valores constantes a utilizar

Si comparamos el comportamiento de V^2 con respecto a t , y si notamos que su comportamiento es lineal (Suposición) y podemos encontrar la pendiente “ m ”. Y por medio de esta pendiente encontrar la permitividad del vacío ϵ_0 .

$$\epsilon_0 = \frac{2\rho g d^2}{m} \quad (41)$$

Si existe un medio dieléctrico entre las placas de un capacitor, ya no vacío, la expresión anterior cambia a:

$$\epsilon = \frac{2\rho g d^2}{m} \quad (42)$$

Donde $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, como se había dicho anteriormente.

Determinaremos ϵ_r usando los valores siguientes:

Como sabemos que la hoja de papel va a levitar y nosotros solo tenemos que vencer la resistencia que ofrezca el medio para que se logre este fenómeno, se quiere determinar la relación entre la permitividad eléctrica relativa y la concentración de un material dieléctrico como ser el dióxido de carbono y después encontrar su pendiente y ver este comportamiento, para poder predecir que valores tendrá la permitividad a cualquier concentración, para ello haremos uso de un experimento que involucra la manipulación de las variables que se describen posteriormente.

Estos resultados se dieron a condiciones estandar de presión y temperatura. Controlando la temperatura, siempre trabajando a $23^\circ C$ y tomando la presión atmosférica media como $0.99 \times 10^5 pa$ calculada en el anexo 1.

2 | Tipo y Diseño de la Investigación

La investigación que se realizó es de tipo cuantitativo con diseño experimental, ya que, primordialmente se estima la permitividad eléctrica relativa o constante dieléctrica de un material dieléctrico gaseoso para diferentes concentraciones máxicas y se grafican los datos obtenidos para evaluar el comportamiento de la constante respecto a la densidad.

Se realizaron mediciones de la diferencia de potencial (Voltaje) entre dos placas de aluminio y el grosor de una lámina de aluminio dentro de una cámara de vacío, además se realizaron mediciones

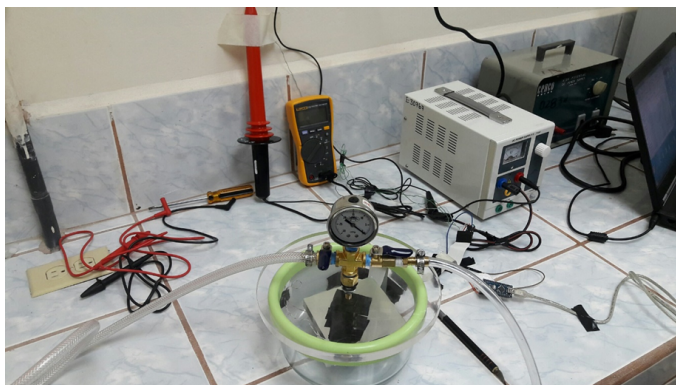


Figura 4: Diseño experimental.

para diferentes concentraciones de dióxido de carbono, estas son las tres variables independientes, por medio de estas obtuvieron diferentes valores para la permitividad del dieléctrico que es nuestra variable dependiente que se quería determinar.

3 | Variables de Análisis

- Permitividad del vacío: Es una constante física que describe cómo un campo eléctrico afecta y es afectado por un medio, se mide en una cámara de vacío con una diferencia de potencial entre las placas y se regula hasta que las hojas de aluminio leviten.
- Diferencia de potencial: Trabajo por unidad de carga ejercido por el campo eléctrico sobre una partícula cargada para moverla entre dos posiciones determinadas, necesaria para poder saber cuál es el potencial adecuado al cual la hoja de aluminio levitará.
- Permitividad eléctrica relativa del dióxido de carbono como medio dieléctrico: Es una constante física que describe cómo un medio dieléctrico como el CO_2 afecta el campo eléctrico y es afectado por la concentración. Es el objeto de nuestro análisis, variable dependiente.
- Concentración másica: Cantidad de soluto disuelto en una determinada cantidad de disolvente o disolución, por medio de la concentración podemos determinar la densidad.

l Variables que controlamos

Se controla la presión en el medio con la cámara de vacío, la primera medición se realizara al más alto vacío que la cámara pueda ofrecer. Controlamos el ingreso de Dióxido de Carbono, esto se hace para controlar la concentración del dieléctrico, por medio del contenedor del gas. Las mediciones se realizaran a una determinada concentración variando el Voltaje hasta que la hoja de papel aluminio de 1 cm^2 levite. Posteriormente se incrementa la concentración y se repite el procedimiento.

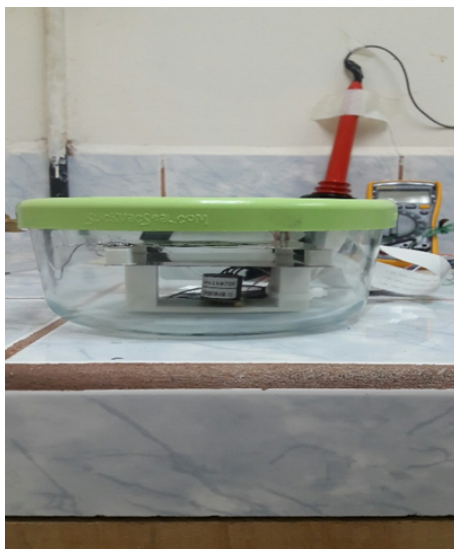


Figura 5: Diseño experimental, cámara de vacío.

I | Estimación de la permitividad del vacío.

En esta etapa de prueba para calibrar el equipo para poder realizar las mediciones de forma correcta. Para realizar este experimento se necesita un vacío causado por una cámara de vacío y se coloca la hoja de aluminio de aproximadamente 1 cm^2 de área entre las placas paralelas conectadas cada una a un polo de la fuente de alto voltaje, luego se energiza con la fuente y se regula hasta que la hoja de aluminio empieza a levitar, midiendo la diferencia de voltaje en las entradas al capacitor. Se repite el procedimiento para diferentes hojas de aluminio de diferente área.

I | Estimación de la permitividad del aire y de dióxido de carbono

En esta etapa se utilizó como punto de partida para poder realizar las mediciones de que serían analizadas más tarde. Para realizar este experimento se necesitó un contenedor en el cual contenga dióxido de carbono puro, el dióxido de carbono ingresara a la cámara de vacío en forma controlada y la concentración se determinara utilizando la ecuación del gas ideal ya que estamos hablando de presiones bajas y temperaturas altas. Se coloca la hoja de aluminio entre las placas paralelas, luego se energiza con la fuente y se regula hasta que la hoja de aluminio empieza a levitar, midiendo la diferencia de voltaje en las entradas al capacitor y la concentración del gas en el capacitor. Repitiéndose los pasos para una diferente concentración del dióxido de carbono.

V | RESULTADOS DEL EXPERIMENTO

1 | Mediciones

Nota: Presión manométrica dada por el instrumento de medición, para encontrar la presión de trabajo dentro de la cámara de vacío hay que restarle a la presión atmosférica promedio $((0.99 \pm 0.01) \times 10^5$

Medida	Voltaje ($V \pm 5V$)	t ($m \pm 2 \times 10^{-7}m$)	Presión Manométrica
1	2423	7.60×10^{-6}	-27 in Hg
2	3360	1.52×10^{-5}	$-91,432.53$ pa
3	4033	2.28×10^{-5}	Presión de trabajo
4	4791	3.04×10^{-5}	$7,567.47$ pa

Tabla 2: Primera Medición a una presión de -27 in Hg

Medida	Voltaje ($V \pm 5V$)	t ($m \pm 2 \times 10^{-7}m$)	Presión Manométrica
1	2350	7.60×10^{-6}	-20 in Hg
2	3252	1.52×10^{-5}	$-67,727.8$ pa
3	3981	2.28×10^{-5}	Presión de trabajo
4	4643	3.04×10^{-5}	$31,272.20$ pa

Tabla 3: Segunda medición a una presión de -20 in Hg

Pa, (Ver Apéndice 1) la presión manométrica. Se determinó tomar una incertidumbre de voltaje de $\pm 5V$ ya que la fuente no era muy estable a la hora de tomar la medida.

La primera, segunda, tercera, cuarta, quinta y sexta medición se pueden ver en las tablas [2], [3], [4], [5], [6] y [7] respectivamente.

VI | ANALISIS DE RESULTADOS

1 | Cálculos realizados

1.1 | Regresiones lineales y gráficas realizadas

Para calibrar el equipo era necesario encontrar la permitividad a la mínima presión que ofrezca el equipo (-27 inch de Hg) y compararla con la permitividad del vacío, para ello se utilizó los datos de la Primera medición del cuadro 3. Del análisis que se hizo en el marco teórico, donde se obtuvo la relación entre el voltaje y la permitividad, como se muestra en la ecuación (40).

$$V^2 = \left(\frac{2\rho g d^2}{\epsilon} \right) t$$

Si graficamos las variables V^2 y t , se observa un comportamiento lineal, tal y como se esperaba, podemos encontrar la pendiente “ m ” por medio de regresión lineal.

Podemos ver que la pendiente $m = (7.208 \pm 0.323) \times 10^{11} V^2/m$, donde m esta relacionada con la

Medida	Voltaje ($V \pm 5V$)	t ($m \pm 2 \times 10^{-7}m$)	Presión Manométrica
1	2355	7.60×10^{-6}	-15 in Hg
2	3203	1.52×10^{-5}	$-50, .797.85$ pa
3	3941	2.28×10^{-5}	Presión de trabajo
4	4630	3.04×10^{-5}	$48,204.15$ pa

Tabla 4: Tercera medición a una presión de -15 in Hg

Medida	Voltaje ($V \pm 5V$)	t ($m \pm 2 \times 10^{-7}m$)	Presión Manométrica
1	2365	7.60×10^{-6}	-10 in Hg
2	3198	1.52×10^{-5}	$-33,863.9$ pa
3	3961	2.28×10^{-5}	Presión de trabajo
4	4618	3.04×10^{-5}	$65,136.10$ pa

Tabla 5: Cuarta medición a una presión de -10 in Hg

permitividad por (42).

$$\epsilon = \frac{2\rho g d^2}{m} = \frac{2(2.70 \times 10^3 \text{Kg/m}^3)(9.78 \text{m/s}^2)(1.13 \times 10^{-2} \text{m})^2}{7.208 \times 10^{11} \text{V}^2/\text{m}}$$

$$\epsilon = 9.355 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \quad (43)$$

Encontrando la incertidumbre la medición por la teoría de propagación de errores básica,

$$\frac{\delta\epsilon}{\epsilon} = \frac{\delta\rho}{\rho} + \frac{\delta g}{g} + 2\frac{\delta d}{d} + \frac{\delta m}{m}$$

obteniendo a $\delta\epsilon = 0.499 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$, recordado que estamos considerando una incertidumbre más alta, ya que, el equipo utilizado no es preciso ni estable.

Quedando al final una permitividad de

$$\epsilon = (9.355 \pm 0.499) \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \quad (44)$$

y encontramos la constante dieléctrica por medio de.

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{9.355 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}}{8.854 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}} = 1.057 \quad (45)$$

Medida	Voltaje ($V \pm 5V$)	t ($m \pm 2 \times 10^{-7}m$)	Presión Manométrica
1	2360	7.60×10^{-6}	-5 in Hg
2	3161	1.52×10^{-5}	$-16,931.9$ pa
3	3928	2.28×10^{-5}	Presión de trabajo
4	4587	3.04×10^{-5}	$82,068.05$ pa

Tabla 6: Quinta medición a una presión de -5 in Hg

Medida	Voltaje ($V \pm 5V$)	t ($m \pm 2 \times 10^{-7}m$)	Presión Manométrica
1	2351	7.60×10^{-6}	0 in Hg
2	3168	1.52×10^{-5}	0 pa
3	3940	2.28×10^{-5}	Presión de trabajo
4	4575	3.04×10^{-5}	0.99×10^5 pa

Tabla 7: Sexta medición a una presión de 0 in Hg, presión atmosférica

con la incertidumbre para ϵ_r de 0.056 , resultando:

$$\epsilon_r = 1.057 \pm 0.056 \quad (46)$$

Si comparamos la permitividad absoluta encontrada en (46) con la permitividad del vacío vemos que tiene un error de 5.7% , lo cual es coherente con el error experimental y además, sabiendo que no estamos en vacío absoluto. Por los resultados obtenidos, podemos validar el experimento.

Haciendo lo mismo con las demas mediciones

1. Para la medidas realizadas a -20 inch de Hg de presión de trabajo obtenemos:
2. Para la medidas realizadas a -15 inch de Hg de presión de trabajo obtenemos:
3. Para la medidas realizadas a -10 inch de Hg de presión de trabajo obtenemos:
4. Para la medidas realizadas a -5 inch de Hg de presión de trabajo obtenemos:
5. Para la medidas realizadas a -0 inch de Hg de presión de trabajo obtenemos:

1.2 | Estimación del número de moléculas de CO_2

Para estimar o determinar la concentración de moléculas de CO_2 presente en la cámara de vacío, se utilizará la ecuación del gas ideal, ya que, trabajamos con presiones bajas y temperaturas altas donde el comportamiento dióxido de carbono es ideal.³

³Inicialmente en las mediciones realizadas se utilizó un sensor de concentración, utilizando una placa electrónica de hardware libre que utiliza un microcontrolador reprogramable con una serie de pines que permiten establecer conexiones entre el controlador y los diferentes sensores (Arduino), pero ante la duda que se generó en sus mediciones de no saber exactamente que media el sensor, se decidió utilizar la ecuación del gas ideal.

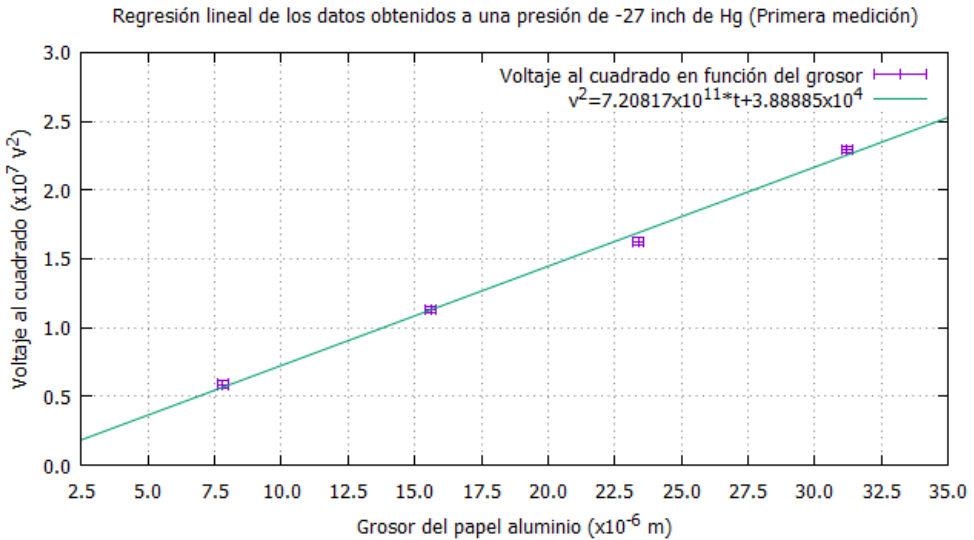


Figura 6: Regresión lineal de las mediciones realizadas a -27 inch de Hg

Se utilizará la expresión del gas ideal

$$PV = k_b NT \quad (47)$$

con $k_b = 1.3806 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$ y como se dijo anteriormente N es el número de moléculas en la cámara de vacío cuyo **volumen efectivo de trabajo, es decir** $V = (1.46 \pm 0.05) \times 10^{-3} m^3$. Podemos encontrar N despejando de (47) tenemos

$$N = \frac{PV}{k_b T} \quad (48)$$

Calculando el número de moléculas:

1. Para la primera medición a una presión de $P = -27 \text{ inch de Hg} = 7.57 \times 10^3 \text{ Pa}$ y como la temperatura de trabajo es de $T = 23^\circ C \pm 1^\circ C = (296.15 \pm 1) \text{ K}$, utilizando (48).

$$N = \frac{PV}{k_b T} = \frac{(7.57 \times 10^3 \text{ Pa})(1.46 \times 10^{-3} m^3)}{(1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K})(296.15 \text{ K})} = 2.70 \times 10^{21} \text{ moléculas}$$

con una incertidumbre de $0.28 \times 10^{21} \text{ moléculas}$.

2. Para la primera medición a una presión de $P = -20 \text{ inch de Hg} = 3.13 \times 10^4 \text{ Pa}$ y a la misma temperatura.

$$N = \frac{PV}{k_b T} = \frac{(3.13 \times 10^4 \text{ Pa})(1.46 \times 10^{-3} m^3)}{(1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K})(296.15 \text{ K})} = 1.12 \times 10^{22} \text{ moléculas}$$

con una incertidumbre de $0.08 \times 10^{22} \text{ moléculas}$

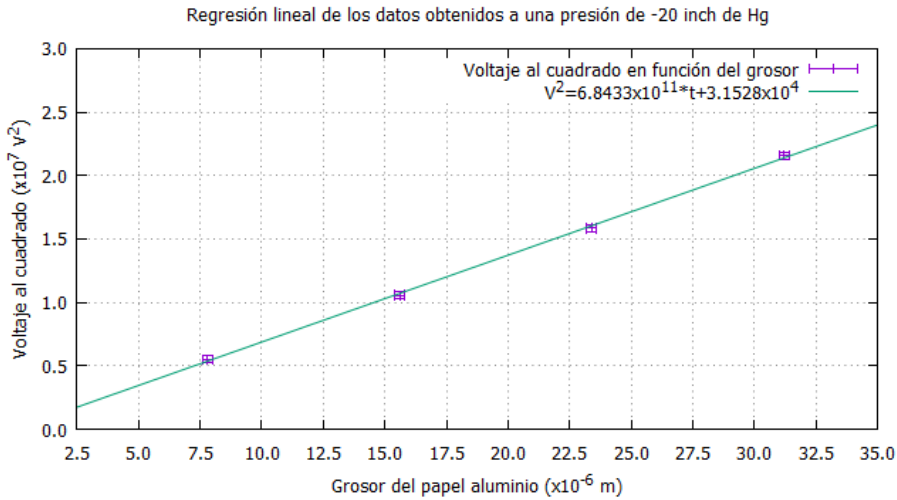


Figura 7: Regresión lineal de las mediciones realizadas a -20 inch de Hg

3. Para la primera medición a una presión de $P = -15$ inch de Hg $= 4.82 \times 10^4$ Pa y a la misma temperatura.

$$N = \frac{PV}{k_b T} = \frac{(4.82 \times 10^4 \text{ Pa})(1.46 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{(1.38 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}})(296.15 \text{ K})} = 1.72 \times 10^{22} \text{ molecules}$$

con una incertidumbre de 0.10×10^{22} molecules

4. Para la primera medición a una presión de $P = -10$ inch de Hg $= 6.51 \times 10^4$ Pa y a la misma temperatura.

$$N = \frac{PV}{k_b T} = \frac{(6.51 \times 10^4 \text{ Pa})(1.46 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{(1.38 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}})(296.15 \text{ K})} = 2.33 \times 10^{22} \text{ molecules}$$

con una incertidumbre de 0.12×10^{22} molecules

5. Para la primera medición a una presión de $P = -5$ inch de Hg $= 8.21 \times 10^4$ Pa y a la misma temperatura.

$$N = \frac{PV}{k_b T} = \frac{(8.21 \times 10^4 \text{ Pa})(1.46 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{(1.38 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}})(296.15 \text{ K})} = 2.93 \times 10^{22} \text{ molecules}$$

con una incertidumbre de 0.15×10^{22} molecules

6. Para la primera medición a una presión de $P = -0$ inch de Hg $= 9.9 \times 10^4$ Pa y a la misma temperatura.

$$N = \frac{PV}{k_b T} = \frac{(9.9 \times 10^4 \text{ Pa})(1.46 \times 10^{-3} \text{ m}^3)}{(1.38 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}})(296.15 \text{ K})} = 3.54 \times 10^{22} \text{ molecules}$$

con una incertidumbre de 0.17×10^{22} molecules

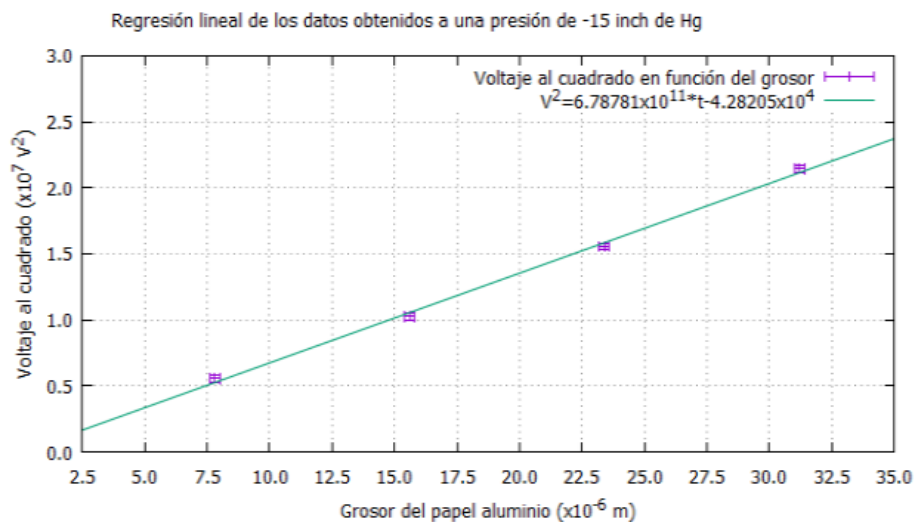


Figura 8: Regresión lineal de las mediciones realizadas a -15 inch de Hg

1.3 | Cuadro de resultados

Los resultados finales se pueden resumir en el siguiente cuadro 8.⁴

1.4 | Relación entre la constante dieléctrica y la concentración de moléculas de CO_2

De los datos obtenidos en los análisis anteriores encontramos el siguiente cuadro 9.

⁴Todos los cálculos que se necesitaron para obtener los datos que conforman el cuadro 9, fueron los mismos que se realizaron para el máximo vacío que el equipo puede ofrecer.

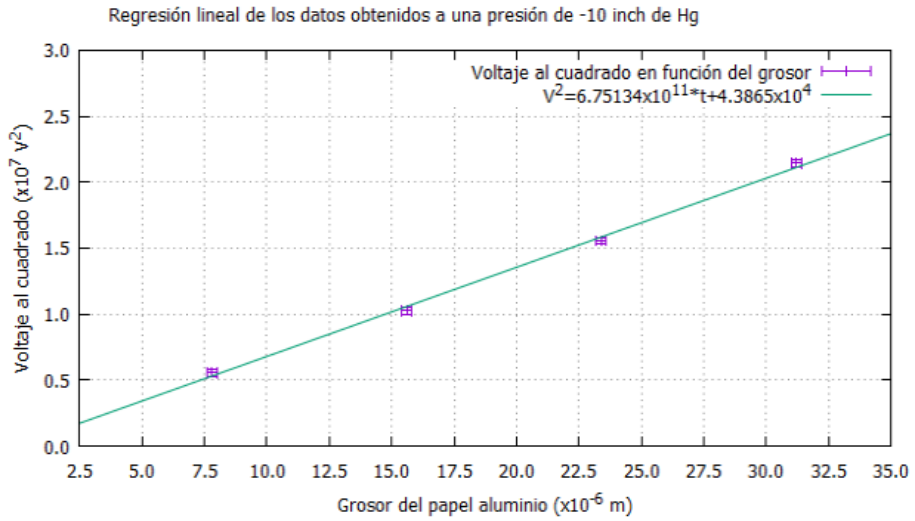


Figura 9: Regresión lineal de las mediciones realizadas a -10 inch de Hg

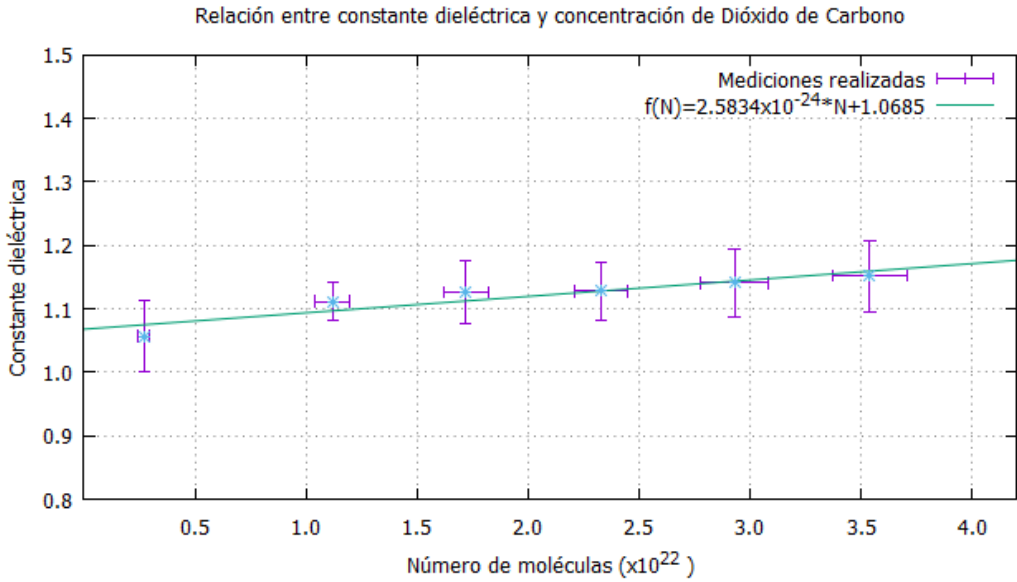


Figura 12: Relación entre constante dieléctrica y la cantidad de moléculas de CO₂

Donde se ha utilizado de (43) a (45) para encontrar la constante dieléctrica y su incertidumbre.

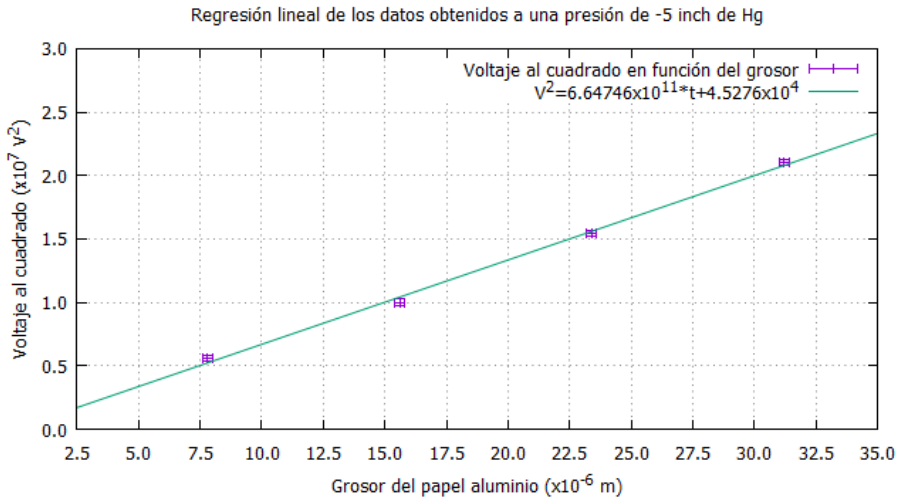


Figura 10: Regresión lineal de las mediciones realizadas a -5 inch de Hg

Si se grafica la relación entre constante dieléctrica y la cantidad de moléculas de CO_2 en la cámara de vacío y se obtiene:

Donde se obtuvo una relación entre constante dieléctrica y concentración de CO_2

$$\epsilon_r(N) = (2.58 \pm 0.05) \times 10^{-24} * N + (1.07 \pm 0.02) \quad (49)$$

1.5 | Comparación de los resultados obtenidos con la relación de Clausius-Mossotti

Si se grafica la constante dieléctrica (ϵ_r) obtenida teóricamente a partir de la ecuación de Clausius-Mossotti (32) deducida con anterioridad con respecto al número de moléculas (N_m) presentes en la cámara de vacío, considerando la polarizabilidad volumétrica molecular del CO_2 con un valor de $\alpha_v = 2.65 \times 10^{-30} m^3$ (Moriyoshi, Kita, y Uosaki, 1993), donde se encuentra la polarizabilidad molecular que se necesita utilizando $\alpha_{ind} = 4\pi\epsilon_0\alpha_v$. Si se compara está gráfica con los resultados experimentales obtenidos en la figura 12, se obtiene: Donde se observa una diferencia considerable en el comportamiento de los resultados y la relación de Clausius-Mossotti, recordando que el equipo utilizado en el experimento no es preciso ni estable y la relación (32) se obtuvo de suposiciones ideales. Comparando los resultados de la última medición (a 0 inch de Hg ó 0.99 atm que fue la presión atmosférica promedio del laboratorio) descrito en la tabla 10 con los resultados reportados por (Moriyoshi y cols., 1993) a 1.00 atm, donde obtuvieron una $\epsilon_r = 1.00969$ a una temperatura de $23^\circ C$, se encontró un porcentaje de error de

$$\%Error = \frac{|1.00969 - 1.152|}{1.00969} * 100 = 14.1\%$$

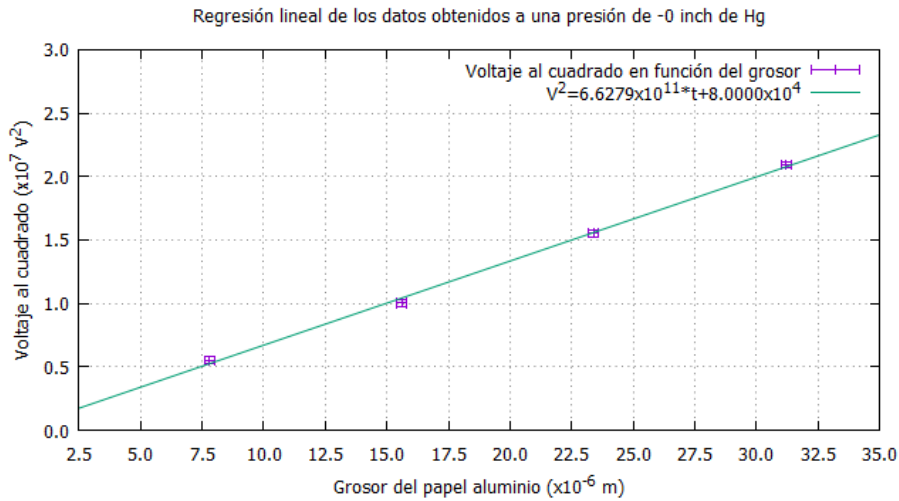


Figura 11: Regresión lineal de las mediciones realizadas a -0 inch de Hg

2 | Conclusiones

- De los resultados obtenidos se observa que la relación existente entre la permitividad eléctrica y la concentración de un dieléctrico en este caso dióxido de carbono (CO_2) tiende a ser de comportamiento lineal, en rangos de concentraciones bajas (presiones menores a 1 atm), igual que se presenta en el trabajo de (Moriyoshi y cols., 1993) a presiones de trabajo de 1 a 5 atm, con un comportamiento diferente a mayores presiones.
- La permitividad eléctrica encontrada al máximo vacío que ofrecía el equipo en el laboratorio fue de $(9.355 \pm 0.499) \times 10^{-12} C^2 / (Nm^2)$, con un error de 5.66% comparado con el valor de la permitividad eléctrica en el vacío internamente aceptado.
- Se encontró que la constante dieléctrica para el dióxido de carbono (CO_2) encontrada en el máximo vacío ofrecido por el equipo es de 1.057 ± 0.056 , cuando se comparó los resultados a 1.00 atm con los resultados reportados en (Moriyoshi y cols., 1993) a la misma presión se obtuvo un error de 14.1%.
- La relación encontrada entre concentración de CO_2 como dieléctrico y la constante dieléctrica obedece a la relación $\epsilon_r(N) = (2.58 \pm 0.05) \times 10^{-24} * N + (1.07 \pm 0.02)$, donde N es el número de moléculas presente en la cámara de vacío.
- Cuando se compara los resultados obtenidos con la relación de Clausius-Mossotti, se observa una diferencia considerable, debiéndose estos resultados a la inestabilidad e imprecisión del equipo con que se realizó este experimento.

Medición	Presión de trabajo Pa	Pendiente de la recta $\left(\frac{V^2}{m}\right)$	Permitividad eléctrica $\left(\frac{C^2}{Nm^2}\right)$	Número de moléculas
Primera	$(7.57 \pm 1) \times 10^3$	$(7.21 \pm 0.32) \times 10^{11}$	$\begin{matrix} (9.360 \\ 0.499) \\ 10^{-12} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \pm \\ \times \\ (2.70 \pm 0.28) \times \\ 10^{21} \end{matrix}$
Segunda	$(3.13 \pm 0.1) \times 10^4$	$(6.84 \pm 0.13) \times 10^{11}$	$\begin{matrix} (9.85 \\ 0.277) \\ 10^{-12} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \pm \\ \times \\ (1.12 \pm 0.08) \times \\ 10^{22} \end{matrix}$
Tercera	$(4.82 \pm 0.1) \times 10^4$	$(6.79 \pm 0.24) \times 10^{11}$	$\begin{matrix} (9.93 \\ 0.439) \\ 10^{-12} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \pm \\ \times \\ (1.72 \pm 0.10) \times \\ 10^{22} \end{matrix}$
Cuarta	$(6.51 \pm 0.1) \times 10^4$	$(6.75 \pm 0.21) \times 10^{11}$	$\begin{matrix} (9.99 \\ 0.399) \\ 10^{-12} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \pm \\ \times \\ (2.33 \pm 0.12) \times \\ 10^{22} \end{matrix}$
Quinta	$(8.21 \pm 0.1) \times 10^4$	$(6.65 \pm 0.25) \times 10^{11}$	$\begin{matrix} (10.1 \\ 0.471) \\ 10^{-12} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \pm \\ \times \\ (2.93 \pm 0.15) \times \\ 10^{22} \end{matrix}$
Sexta	$(0.99 \pm 0.01) \times 10^5$	$(6.63 \pm 0.21) \times 10^{11}$	$\begin{matrix} (10.2 \\ 0.404) \\ 10^{-12} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \pm \\ \times \\ (3.54 \pm 0.17) \times \\ 10^{22} \end{matrix}$

Tabla 8: Tabla de resultados

3 | Recomendaciones

1. Para obtener mejores resultados, mucho más precisos y exactos se recomienda contar con una fuente de alta tensión de mayor rango de salida y también que su estabilidad sea superior, también una cámara de vacío con una bomba de succión con mayor capacidad para generar menores valores de vacío y está a su vez cuenta con los seguros adecuados para conservar por mayor tiempo el vacío, la cámara debe ser de mayores dimensiones (mayor volumen), ya que con tan poco espacio se dificulta manipular el equipo.
2. Para observar mejor el comportamiento de la constante dieléctrica con respecto a la concentración, se recomienda hacer mayor número de mediciones, en este caso se dificultó porque la cámara de vacío con que se contaba, solo permitía trabajar en ciertos rangos de presión y en un lapso muy corto.
3. Como primer experimento de este tipo realizado en Honduras, sus resultados fueron aceptables en orden de magnitud, se comparó con la relación de Clausius-Mossotti que fue deducida de condiciones ideales, sin embargo se podría comparar mejor con una relación más real como la obtenida por Debye o por Onsanger (Sagadevan y cols., 2014) que contiene más elementos reales, o se podría tomar en cuenta el método presentado por Harvey y Lemmon (Harvey y Lemmon, 2005) el cual es más elaborado y considerando varios factores omitidos por Clausius-Mossotti.
4. En este trabajo se dio por sentado que la temperatura fue constante, ya que, la temperatura ambiente

Medición (inch de Hg)	Constante dieléctrica	Número de moléculas
-27	1.057 ± 0.056	$(2.70 \pm 0.28) \times 10^{21}$
-20	1.112 ± 0.031	$(1.12 \pm 0.08) \times 10^{22}$
-15	1.126 ± 0.050	$(1.72 \pm 0.10) \times 10^{22}$
-10	1.128 ± 0.045	$(2.33 \pm 0.12) \times 10^{22}$
-5	1.141 ± 0.053	$(2.93 \pm 0.15) \times 10^{22}$
0	1.152 ± 0.056	$(3.54 \pm 0.17) \times 10^{22}$

Tabla 9: Relación entre la constante dieléctrica y la concentración de moléculas de CO_2

se mantenía constante, se recomienda para futuros trabajos definir un método que permita determinar la temperatura de trabajo insitu, determinar la presión atmosférica con un método más exacto y rápido y obtener una mayor exactitud en las dimensiones de la cámara de vacío y grosor del papel aluminio.

- Los resultados obtenidos manifiestan un error considerablemente grande (14.1 %) y se pudiese pensar que el método no es adecuado, sin embargo, estos resultados son válidos para efectos de educativos pudiéndose generar unas prácticas de laboratorio avanzado para estudiantes de Física. Si se toman en cuenta las recomendaciones para futuros experimentos de este tipo se pueden lograr mejores resultados y se podrían investigar propiedades de otras sustancias.

VII | ANEXOS

1 | Anexo 1. Determinar la presión atmosférica en el laboratorio con el método Dumas

En el siglo XIX Jean Baptiste André Dumas demostró (?) que el peso molecular de algunos compuestos orgánicos era directamente proporcional a la densidad de vapor del compuesto, y usando este principio creo un método relativamente simple para determinar el peso molecular de una sustancia volátil, especialmente de gases y líquidos con bajos puntos de ebullición y los cuales cumplen con la ley de gas ideal.

$$PV = nRT$$

El peso molecular se calcula usando la siguiente formula

$$M = \frac{mTR}{VP}$$

Ahora haciendo algunos cambios en la ecuación en función de parámetros que podamos medir en el laboratorio, donde V es el volumen del contenedor o recipiente y pudiendolo determinar utilizando una masa de agua a temperatura ambiente, tenemos:

$$M = \frac{mTR\rho}{m_a P}$$

Dado que nos interesa medir la presión atmosférica tenemos

$$P = \frac{m_v TR\rho}{m_a M}$$

Donde:

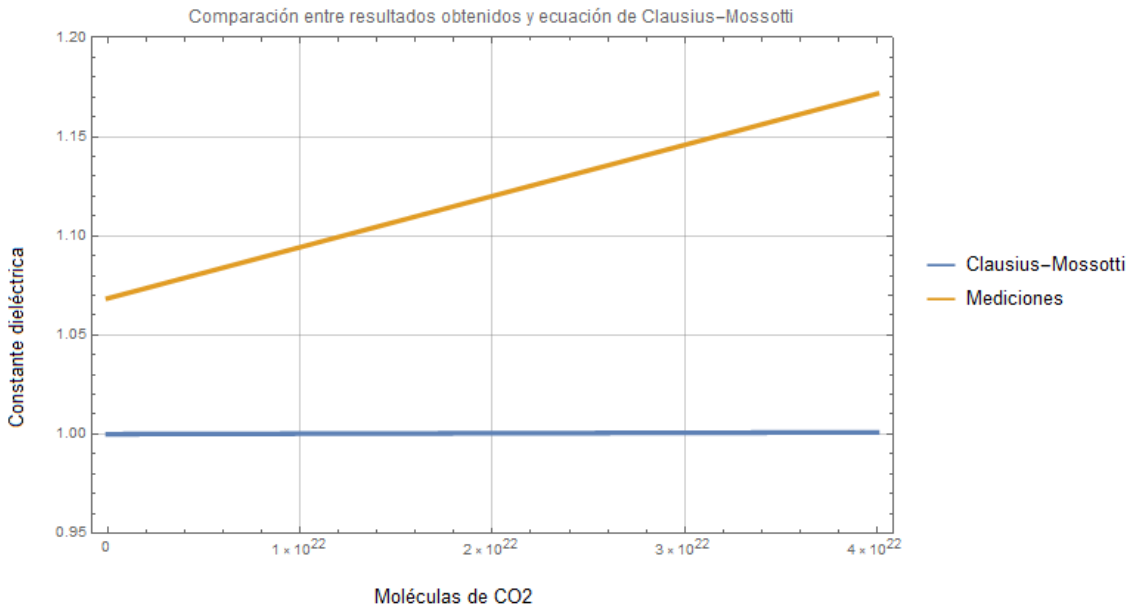


Figura 13: Comparación de los resultados obtenidos con la relación de Clausius-Mossotti

P Presión de vapor encerrado

M Peso molecular

m_v Masa del vapor encerrado

T Temperatura del vapor

R Constante universal de los gases ideales ($8.314472J/molK$)

m_a Masa del agua

ρ Densidad del agua a temperatura ambiente ($997.62Kg/m^3$ a $23.0^\circ C$ fuente [13])

Haremos uso de este diseño experimental para determinar la presión atmosférica, el experimento se llevara a cabo con el fin de encontrar un rango de presiones en UNAH-CU, específicamente en el laboratorio donde estamos realizando el experimento “Medida del comportamiento de la constante dieléctrica para bajas densidades de CO_2 por medio de levitación eléctrica y comparación con la relación de Clausius-Mossotti.”, esto porque la presión es una cantidad que depende de variables climatológicas como ser temperatura, humedad relativa entre otros, es decir, cada día tenemos valores de presión dentro de un rango, como trabajamos con vacío, se quiere determinar el vacío máximo que la bomba nos ofrece. Se harán mediciones en días diferentes para determinar dicho rango.

La sustancia volátil que se utilizara es etanol o mejor conocido como alcohol etílico (C_2H_6O) con un punto de ebullición de $78.37^\circ C$ y con una masa molar de $46.06844g/mol$ (Rodebush y Eddy, 1940).

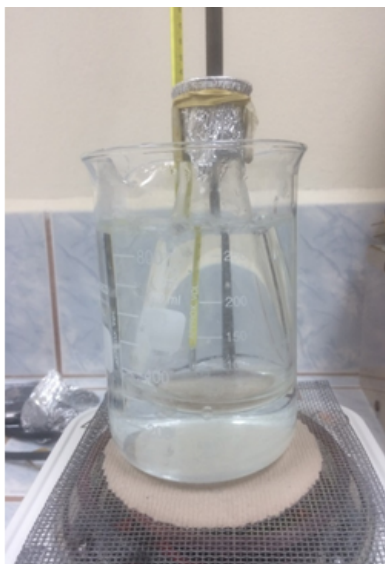


Figura 14: Diseño experimental, para obtener la presión atmosférica en el laboratorio.

1 Procedimiento Experimental

1. Medir la masa del Erlenmeyer (250mL).
2. Medir la masa del Erlenmeyer con su respectivo tapón.
3. Añadir al Erlenmeyer de 5 – 6mL de alcohol etílico.
4. Fijar el Erlenmeyer del cuello introduciéndolo en agua hirviendo.
5. Medir la temperatura del sistema el cual suponemos está en equilibrio térmico.
6. Observar el alcohol etílico del Erlenmeyer cuando todo el líquido haya evaporado lo suficiente para colocarle el tapón tal que todo el recipiente este cubierto por el vapor, secamos las paredes exteriores del recipiente.
7. Medimos las masa del Erlenmeyer (tapón más vapor de alcohol etílico).
8. Determinar el volumen del recipiente hasta el tapón colocado: llenar el Erlenmeyer con agua y pesarlo, y luego utilizar la densidad del agua a la temperatura que se encuentre en el laboratorio.

1 Tabla de datos para determinar la presión atmosférica en el laboratorio

Masa de agua m_a que desplaza el volumen encerrado por el Erlenmeyer es:

$$m_a = (326.5 \pm 0.1)g$$

Masa del Erlenmeyer (g)	Masa del Erlenmeyer+ Tapón (g)	Masa del Erlenmeyer +Tapón +vapor (g)	Masa del vapor (g)	Temperatura (°C)
116.583 ± 0.002	117.958 ± 0.002	118.427 ± 0.002	0.469 ± 0.004	95 ± 1
116.6213 ± 0.0005	117.8915 ± 0.0005	118.3835 ± 0.0005	0.492 ± 0.001	96 ± 1

Tabla 10: Algunas mediciones para determinar la presión atmosférica por el método de Dumas

I Resultados

$$P = (0.96 \pm 0.01) \times 10^5 \text{ pa}$$

y

$$P = (1.01 \pm 0.01) \times 10^5 \text{ pa}$$

* Solo se incluyeron en este trabajo dos mediciones, la que nos dieron en los extremos.

I Conclusión

Para los días que se llevó a cabo el experimento se encontró un rango de presiones que va desde los $0.96 \times 10^5 \text{ Pa}$ hasta los $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$, datos obtenidos en días distintos. Dando un promedio de $(0.99 \pm 0.01) \times 10^5 \text{ Pa}$ que es la presión atmosférica con la que se trabajará.

I REFERENCIAS

- Ashcroft, N., y Mermin, N. (1976). *Solid State Physics*. Philadelphia: Saunders College.
- Clausius, R. (1879). . *Vieweg. Braunschweig*, 2.
- Coulomb, C. A. (1788). Premier mémoire sur l'électricité et le magnétisme. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences.*, 569-577.
- Faraday, M. (1837). Experimental researches in electricity. *Phil.Trans.*, 128(1), 79, 265.
- Harvey, A., y Lemmon, E. (2005, 2005-01-11). Method for estimating the dielectric constant of natural gas mixtures. (26). Descargado de https://tsapps.nist.gov/publication/get_pdf.cfm?pub_id=50062
- Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics* (3rd ed. ed.). New York, NY: Wiley. Descargado de <http://cdsweb.cern.ch/record/490457>
- Kerry, J. (2012). Aluminium foil packaging. *Packaging Technology, Woodhead Publishing*, 163-177. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9781845696658500093> doi:
- Keyes, F. G., y Kirkwood, J. G. (1930, Aug). The dielectric constant of carbon dioxide as a function of temperature and density. *Phys. Rev.*, 36, 754–761. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.36.754> doi:
- Moriyoshi, T., Kita, T., y Uosaki, Y. (1993). Static relative permittivity of carbon dioxide and nitrous oxide up to 30 mpa. *Berichte der Bunsengesellschaft für physikalische Chemie*, 97(4), 589-596. Descargado de <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/bbpc.19930970409> doi:
- Mossoti, O. F. (1847). *Bibl. Univ. Modena*. (n.º 6). Modena, Italy.
- Mossoti, O. F. (1850). Mem. di Mathem e. di. *Fisica in Modena*, 2(24), 49.
- Musschen Broek, P. V. (1762). *Introduction Philosophion Naturalem*. Luchtman, Leiden.
- NIST. (2019, May). Bibliography on the constants (version 3.0). *National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD.*. Descargado de <http://physics.nist.gov/constantsbib>

- Rodebush, W. H., y Eddy, C. R. (1940). Dielectric polarization in solution i. the failure of the clausius-mosotti equation. *The Journal of Chemical Physics*, 8(5), 424-428. Descargado de <https://doi.org/10.1063/1.1750678> doi:
- Sagadevan, S., Sundaram, A. S., y Sastha, S. (2014). A brief review of the relevant dielectric theories of solids. *Latin American Journal of Physics Education*, 8(3), 397-406.
- Smyth, C. P. (1966). Dielectric polarization and relaxation. *Annual Review of Physical Chemistry*, 17(1), 433-456. Descargado de <https://doi.org/10.1146/annurev.pc.17.100166.002245> doi:
- Tenorio, C. A., y Espinoza, E. (2007). Estudio gravimétrico del cuadrángulo de tegucigalpa, valle del zamorano, valle de san juan de flores y morocelí. *Revista Ciencia y Tecnología*. Descargado de <http://www.lamjol.info/index.php/RCT/article/viewFile/707/528>
- Wangsness, R. K. (1986). *Electromagnetic Fields, 2nd Edition*.