



Determinación de los parámetros de un agujero negro de Kerr con MOG en términos de los desplazamientos al rojo y al azul.

On the calculation of the Kerr black hole parameters with Modified Gravity in terms of blueshift and redshift

H.P. BAUTISTA-SOTO¹, B.O. LARIOS-LOPEZ²

Recibido: 19 de julio de 2022 / Aceptado: 15 de agosto de 2022

RESUMEN

Utilizando principios de simetrías en relatividad general, las geodésicas de movimiento de estrellas y fotones en la región de un agujero negro (BH) de Kerr-MOG son calculadas. Posteriormente, se encuentran expresiones matemáticas para la masa (m) y el parámetro de spin del BH en estudio (a) en términos del corrimiento al rojo y al azul de los fotones emitidos por una estrella que orbita el BH. Los resultados de este trabajo incorporan órbitas de las partículas geodésicas fuera del plano ecuatorial ($\theta_E = \frac{\pi}{2}$), esto extiende los estudios realizados previamente y permite tener límites que bien podrían servir de validación de la relatividad general incluso en el régimen de campo gravitacional fuerte.

ABSTRACT

The geodesic of motion for stars and photons around a Kerr-MOG black hole is calculated using symmetry concepts from general theory of relativity. With the help of these findings, we were able to calculate the mass (m) and spin (a) of the black hole in terms of the blueshift and redshift of a photon produced by a star around the black hole. Our results, which account for star orbits that are not in the equatorial plane ($\theta_E = \frac{\pi}{2}$), allow us to express constraints that may aid in the verification of general theory of relativity in the presence of strong gravitational fields.

PALABRAS CLAVES

Agujero negro de Kerr, gravedad modificada, geodésicas, masa, spin

KEYWORDS

Kerr black hole, modified gravity, geodesics, mass, spin

¹Departamento de Gravitación, Altas Energías y Radiaciones, departamento de materia condensada, Escuela de Física. Universidad Nacional Autónoma de Honduras.
hermes.bautista@unah.edu.hn

²Departamento de Gravitación, Altas Energías y Radiaciones, Escuela de Física. Universidad Nacional Autónoma de Honduras.
bryan.larios@unah.edu.hn

* Esta obra está bajo una licencia Creative Commons Reconocimiento - NoComercial 4.0 Internacional

* This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

I | INTRODUCCIÓN

Los agujeros negros son los objetos mas impresionantes y exóticos del universo, estos extraños y complejos cuerpos surgen al resolver las ecuaciones de campo de Einstein (Yagi y Stein, 2016), y son de interés tanto para el público en general como para los científicos, pero ¿por qué son tan interesantes?, la respuesta es clara; el sueño de los físicos a lo largo del tiempo siempre ha sido unificar todas las interacciones de la naturaleza en una sola teoría del todo, esto ha sido intentado por las grandes mentes de la ciencia (Miramontes y Volke, 2013), y al parecer los agujeros negros son una de las principales razones que impulsan la búsqueda de esa unificación, ya que la teoría de la relatividad general no basta para explicar lo que ocurre en el interior del agujero negro, se debe aplicar la mecánica cuántica también (Manko y Novikov, 1992).

El concepto de agujero negro no nace con la relatividad general de Einstein, la primera suposición de su existencia data del siglo XVIII, con las especulaciones de John Michell en el Reino Unido, y Pierre Simón de Laplace en Francia (Miramontes y Volke, 2013). John Michell, un geólogo inglés se preguntaba de que tamaño tendría que ser una estrella con una cierta masa para que su velocidad de escape fuera tal que ni la luz pueda escapar, la velocidad de la luz es de 300,000 km/s (Bambi y Cosmol, 2011). Se sabe que todos los cuerpos tienen una velocidad de escape, por ejemplo para escapar de la Tierra se debe lanzar un objeto a 11 km/s, de manera que en un agujero negro la gravedad es tal que ni la luz puede escapar (Miramontes y Volke, 2013).

Estos objetos que imagino John Michell y Laplace permanecieron como una simple curiosidad, no fue sino hasta el siglo XX cuando el joven Albert Einstein publicara su teoría general de la relatividad en 1915 (Miramontes y Volke, 2013). La teoría general de la relatividad viene a reemplazar la teoría de la gravitación de Newton, según Newton el tiempo y el espacio son absolutos, y la gravedad es una fuerza que aparece instantáneamente, a pesar de que Newton logro una gran hazaña al unificar la mecánica celeste con la mecánica terrestre, su teoría era incompleta (Will, 1993). El universo mecánico de Newton debía ser modificado, hubo que esperar mucho tiempo hasta que apareció Einstein y revoluciono nuestra forma de ver el universo. Según Einstein la gravedad no es una fuerza, sino el resultado del movimiento de un cuerpo que se mueve en un espacio-tiempo que ha sido curvado por la presencia de otro cuerpo. Einstein pudo llegar a esta idea gracias al principio de equivalencia, la teoría general de la relatividad es la teoría moderna de la gravitación (Johannsen, 2016).

Las soluciones de campo de Einstein son muy complejas, de hecho Einstein creía que nunca serían resueltas, pero unos meses después fueron encontradas las primeras soluciones exactas por el físico alemán Karl Schwarzschild en 1916 (Carroll, 2016). Las soluciones de Schwarzschild son para un objeto esférico y estático, y en el vacío lo que simplifica el problema, los agujeros negros de Schwarzschild fueron los primeros en conocerse.

Hubo que esperar hasta el año de 1963 cuando Roy Kerr, un físico neozelandés encontró una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein. Un agujero negro de Kerr a diferencia de uno de Schwarzschild tiene rotación y los parámetros que lo caracterizan son su masa M y momento angular a (Herrera-Aguilar y Nucamendi, 2015).

En los últimos 20 años se han realizado multiples esfuerzos para poder caracterizar los parámetros de un agujero negro desde la perspectiva de teoría de la relatividad general, investigaciones de la NASA sugieren que hay un agujero negro supermasivo en el centro de nuestra galaxia (Ghez y cols., 2004), recientemente se pudo fotografiar uno de estos objetos por primera vez (Ghez y cols., 2008), pero aun con todos estos esfuerzos, encontrar expresiones matemáticas de los parámetros de un agujero negro

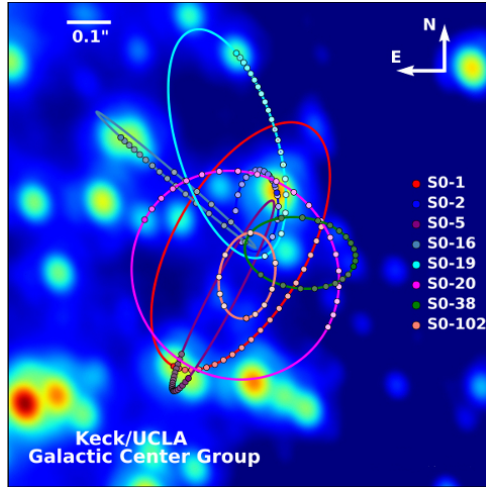


Figura 1: Órbitas de estrellas alrededor de Sgr A*, imagen tomada de Keck/Ucla Galactic Center Group.

en términos de posibles observables físicos es una tarea compleja. En este trabajo de investigación utilizamos un método para calcular estos parámetros en términos de los desplazamientos al rojo y al azul, nuestro trabajo es motivado por las observaciones de las órbitas cerradas de estrellas al rededor de un agujero negro super masivo en el centro de la Vía Láctea y además, por los resultados presentados en la referencia (Sheoran, Herrera-Aguilar, y Nucamendi, 2018).

En la figura 1 podemos ver las órbitas de varias estrellas girando en torno al agujero negro supermasivo Sagitario A* el cual está alojado en el centro de nuestra galaxia la Vía Láctea, existen datos experimentales sobre la órbita de la estrella SO-2 los cuales nos serán de mucha ayuda en este trabajo (Herrera-Aguilar y Nucamendi, 2015). La idea de nuestro trabajo se enfoca en utilizar partículas geodésicas (estrellas) orbitando un agujero negro, estas estrellas emiten luz, la cual sera detectada por instrumentos en la Tierra, pero debido al movimiento orbital de la estrella habrá un desplazamiento al rojo y al azul z_r y z_b respectivamente (Sheoran y cols., 2018), los parámetros que caracterizan el agujero negro finalmente serán expresados en función de estos desplazamientos.

El orden de este artículo es el siguiente; En la Sección 1, presentamos una breve introducción sobre la importancia de los agujeros negros y la necesidad de determinar los parámetros (masa y spín) de este a partir de los fundamentos de relatividad general. En la Sección 2, presentamos los fundamentos de la métrica de Kerr y de la gravedad modificada, se presenta además el método y detalles específicos para determinar las geodésicas de movimiento para partículas con y sin masa en la vecindad de un agujero negro. En la Sección 3 presentamos el análisis numérico de nuestro trabajo y finalmente en la Sección 4 presentamos las conclusiones y posibles opciones de trabajo a futuro.

II | FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En esta sección presentamos algunas soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein, como ser la métrica de Schwarzschild y la métrica de Kerr, que bajo ciertas condiciones físicas pueden ser utilizadas para representar algunos agujeros negros astrofísicos. Sin embargo, el objetivo es presentar un preámbulo de la métrica de Kerr-MOG (gravedad modificada), que será la utilizada en este trabajo

ya que es una métrica más general y puede ser utilizada para estudiar una alternativa (o bien para validar relatividad general) de la teoría de gravedad de Einstein en presencia de un campo gravitacional fuerte.

1 | Agujero negro de Kerr

El agujero negro asociado a la solución de Schwarzschild corresponde al caso de simetría esférica, y como tal es la solución que uno no espera encontrar en la naturaleza. Los objetos astrofísicos reales tienen momento angular, por lo que no son completamente esféricos (Miramontes y Volke, 2013).

La primera solución para un agujero negro más general que la de Schwarzschild fue la asociada a un agujero negro esférico pero con carga eléctrica, encontrada poco después de la de Schwarzschild, y conocida como la solución de Reissner-Nordstrom (Carroll, 2016). La solución para un agujero negro con rotación fue encontrada por Kerr en 1963 (Chandrasekhar, 1983). La métrica de Kerr tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{2GMarsen^2\theta}{\rho^2} (dt d\varphi + d\varphi dt) + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{sen^2\theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta sen^2\theta] d\varphi^2, \quad (1)$$

donde

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2 \quad (2)$$

y

$$|\rho^2(r, \theta)| = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (3)$$

Donde M es la masa del agujero, y a es el parámetro de rotación que esta relacionado con el momento angular J del agujero negro de la forma (Sheoran y cols., 2018)

$$a = J/M. \quad (4)$$

La solución de Kerr resulta considerablemente más compleja que la de Schwarzschild, y tiene algunas propiedades muy interesantes. En particular, para $a > M$ el horizonte de eventos desaparece y la solución corresponde a lo que se conoce como "singularidad desnuda" (Sheoran y cols., 2018), es decir, una singularidad que no está protegida por un horizonte de eventos. De la métrica de Kerr también podemos observar que existe una región externa al horizonte de eventos de donde es posible escapar, pero no está permitido permanecer en reposo, a dicha región se le conoce como ergósfera (Bardeen, Press, y Teuklsky, 1972).

2 | Gravedad Modificada

La gravedad modificada satisface unas ecuaciones de campo que son más generales que las de Einstein, estas incluyen campos escalares y vectoriales y se promueve la constante gravitacional de Newton a un campo escalar en lugar de una constante (Moffat, 2015), MOG no es empleado en este trabajo como una alternativa a la materia oscura, la importancia del parámetro α es que altera las órbitas de

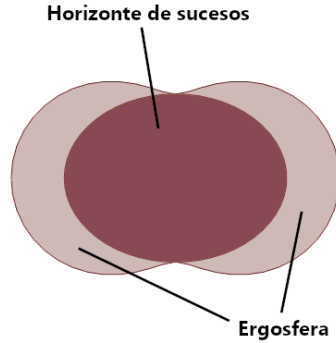


Figura 2: Ergósfera entorno al horizonte de sucesos, imagen tomada de ALBERTO APARICI / YUKTEREZ (SIMON TYRAN).

las estrellas, cuando $\alpha = 0$ recuperamos la métrica de Kerr. La ecuación escalar para MOG tiene una solución estática y esféricamente simétrica para agujero negro determinada por la masa M con dos horizontes, la constante gravitacional es $G = G_N(1 + \alpha)$ donde α es un parámetro (Moffat, 2015). Además de la masa m , nosotros incluimos en nuestra solución el espín $J = Ma$.

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a \sin^2 \theta d\varphi) - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2}[(r^2 + a^2)d\varphi - a dt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2, \quad (5)$$

donde

$$\Delta = r^2 - 2GM_r + a^2 + \alpha G_N GM^2, \quad (6)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (7)$$

La geometría del espacio-tiempo es axialmente simétrica alrededor del eje z . Los horizontes son determinados por las raíces de $\Delta = 0$ Moffat (2015)

$$r_{\pm} = G_N(1 + \alpha)M \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{a^2}{G_N^2(1 + \alpha)^2 M^2} - \frac{\alpha}{1 + \alpha}} \right], \quad (8)$$

y el horizonte de la ergosfera es determinado por $g_{00} = 0$

$$r_E = G_N(1 + \alpha)M \left[1 + \sqrt{1 - \frac{a^2 \cos^2 \theta}{G_N^2(1 + \alpha)^2 M^2} - \frac{\alpha}{1 + \alpha}} \right]. \quad (9)$$

La gravedad modificada esta basada en un principio de acción, y toma la siguiente forma (Moffat, 2005):

$$S = S_{\text{Grav}} + S_{\phi} + S_S + S_M, \quad (10)$$

donde

$$S_{\text{Grav}} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{G} (R + 2\Lambda) \right], \quad (11)$$

$$S_{\phi} = - \int d^4x \sqrt{-g} \left[\omega \left(\frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + V(\phi) \right) \right], \quad (12)$$

y

$$\begin{aligned} S_S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{G^3} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} G \nabla_{\nu} G - V(G) \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{G} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \omega \nabla_{\nu} \omega - V(\omega) \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu^2 G} + \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \mu \nabla_{\nu} \mu - V(\mu) \right) \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

3 | Desplazamientos al rojo y al azul

Necesitamos calcular la expresión para los desplazamientos al rojo y al azul en términos de las frecuencias de los fotones detectados, para lo cual debemos expresar las frecuencias de un fotón en términos de las cuadrivelocidades $U_{e/d}^{\nu}$ y los cuádrimomentos $K_{e/d}^{\nu}$ medidas por un observador localizado en un punto D .

$$\mathbf{v}_{e/d} = -K_{\mu} U^{\mu} \Big|_{D_{e/d}}. \quad (14)$$

Donde el índice e/d , (e) es para el emitido y (d) el detectado en el espacio-tiempo del punto D (Sheoran y cols., 2018), las velocidades de las partículas masivas $U_{e/d}^{\nu}$ y los momentos de los fotones $K_{e/d}^{\nu}$ son:

$$\begin{cases} U_e^{\nu} = (U^t, U^r, U^{\theta}, U^{\phi})|_e \\ U_d^{\nu} = (U^t, U^r, U^{\theta}, U^{\phi})|_d \\ K_e^{\nu} = (K^t, K^r, K^{\theta}, K^{\phi})|_e \\ K_d^{\nu} = (K^t, K^r, K^{\theta}, K^{\phi})|_d. \end{cases} \quad (15)$$

Con la frecuencia de los fotones $\mathbf{v}_{e/d} = -(K_{\mu} U^{\mu}) \Big|_{e/d}$ podemos calcular los corrimientos al rojo y al azul a partir de la expresión general (Sheoran y cols., 2018), la cual es:

$$z = \frac{\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_d}{\mathbf{v}_d} = \frac{\mathbf{v}_e}{\mathbf{v}_d} - 1, \quad (16)$$

$$1 + z = \frac{\mathbf{v}_e}{\mathbf{v}_d}, \quad (17)$$

$$1 + z = \frac{(EK^t - LK^{\phi} - g_{rr}U^rK^r - g_{\theta\theta}U^{\theta}K^{\theta})}{(EK^t - LK^{\phi} - g_{rr}U^rK^r - g_{\theta\theta}U^{\theta}K^{\theta})}, \quad (18)$$

$$1 + z = \frac{(E_{\gamma}U^t - L_{\gamma}U^{\phi} - g_{rr}U^rK^r - g_{\theta\theta}U^{\theta}K^{\theta})}{(E_{\gamma}U^t - L_{\gamma}U^{\phi} - g_{rr}U^rK^r - g_{\theta\theta}U^{\theta}k^{\theta})}. \quad (19)$$

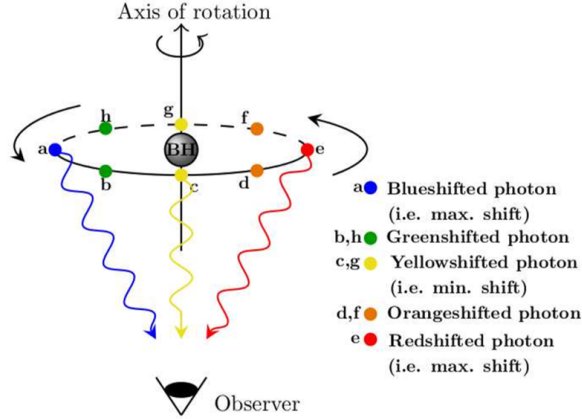


Figura 3: La figura muestra el redshift de los fotones emitidos por una estrella que orbita un agujero negro de Kerr tomado de (Sheoran y cols., 2018)

En las ecuaciones (18) y (19) hemos hecho uso de los vectores de Killing para expresar los desplazamientos en función de la energía y el momento angular las cuales son cantidades que se conservan (Sheoran y cols., 2018).

Como la órbita es circular entonces ($U^r = 0$), y así las expresiones se simplifican quedando como:

$$1 + z = \frac{(Ek^t - LK^\phi - g_{\theta\theta}U^\theta k^\theta)}{(EK^t - Lk^\phi - g_{\theta\theta}U^\theta K^\theta)}, \quad (20)$$

$$1 + z = \frac{E_\gamma U^t - L_\gamma U^\phi - g_{\theta\theta}U^\theta k^\theta / e}{E_\gamma U^t - L_\gamma U^\phi - g_{\theta\theta}U^\theta K^\theta / d}. \quad (21)$$

Como el parámetro de impacto es $b = L_\gamma / E_\gamma$ podemos manipular la expresión a fin de introducir este en los desplazamientos al rojo y al azul Sheoran y cols. (2018)

$$1 + z = \frac{E_\gamma (U_e^t - (L_\gamma / E_\gamma) U_e^\phi - (g_{\theta\theta} / E_\gamma) U_e^\theta k_e^\theta)}{E_\gamma (U_d^t - (L_\gamma / E_\gamma) U_d^\phi - (g_{\theta\theta} / E_\gamma) U_d^\theta k_d^\theta)}, \quad (22)$$

$$1 + z = \frac{U_e^t - b_e U_e^\phi - (g_{\theta\theta} / E_\gamma) U_e^\theta k_e^\theta}{U_d^t - b_d U_d^\phi - (g_{\theta\theta} / E_\gamma) U_d^\theta k_d^\theta}. \quad (23)$$

En la cinemática del desplazamiento al rojo, el valor central del parámetro de impacto es $b = 0$ lo cual permite expresar lo siguiente (Sheoran y cols., 2018):

$$\Rightarrow 1 + z_c = \frac{U_e^t - (g_{\theta\theta} / E_\gamma) U_e^\theta k_e^\theta}{U_d^t - (g_{\theta\theta} / E_\gamma) U_d^\theta k_d^\theta}. \quad (24)$$

Si restamos (23) y (24) obtenemos lo siguiente:

$$z_k = (1+z) - (1+z_c) = z - z_c, \quad (25)$$

$$z_k = \frac{b_d U_d^\Phi U_e^t - b_e U_e^\Phi U_d^t + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) [b_e U_e^\Phi U_d^\theta k_d^\theta - b_d U_d^\Phi U_e^\theta k_e^\theta]}{U_d^t (U_d^t - b_d U_d^\Phi) + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) U_d^\theta k_d^\theta [b_d U_d^\Phi - U_d^t + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) U_d^\theta k_d^\theta]}. \quad (26)$$

4 | Métrica del agujero negro de Kerr con MOG

Las componentes del tensor métrico de Kerr con gravedad modificada (MOG) son las siguientes (Moffat, 2015):

$$g_{tt} = - \left[\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right], \quad (27)$$

$$g_{rr} = \frac{\Sigma}{\Delta}, \quad (28)$$

$$g_{t\varphi} = -2 \left(\frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma} \right) a \sin^2 \theta, \quad (29)$$

$$g_{\theta\theta} = \Sigma, \quad (30)$$

$$g_{\varphi\varphi} = \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right] \sin^2 \theta. \quad (31)$$

La métrica de Kerr con MOG luce de la siguiente manera:

$$ds^2 = - \left(\frac{-a^2 \sin^2 \theta + \Delta}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - 2 \left(\frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma} \right) a \sin^2 \theta dt d\varphi + \Sigma d\theta^2 + \left[\frac{-\Delta a^2 \sin^2 \theta + (r^2 + a^2)^2}{\Sigma} \right] \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (32)$$

Las componentes del tensor métrico están en función de las siguiente cantidades (Moffat, 2015):

$$\Delta = r^2 - 2GMr + a^2 + \underbrace{\alpha M^2 G G_N}_{M_\beta}, \quad (33)$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (34)$$

$$G = G_N (1 + \alpha), \quad (35)$$

$$\alpha = \frac{G - G_N}{G_N}, \quad \text{parámetro de deformación.} \quad (36)$$

En la figura 4a podemos notar lo altamente sensible que es la componente g_{tt} para diferentes valores del parametro de deformacion α , cuando $\alpha = 0$ ocurre el caso especial, en el cual recuperamos Relatividad General.

El parámetro de deformación α tiene un efecto sobre el tamaño de las órbitas, como podemos apreciar cuando el valor de α incrementa la órbita reduce su tamaño como podemos apreciar en la figura 4b.

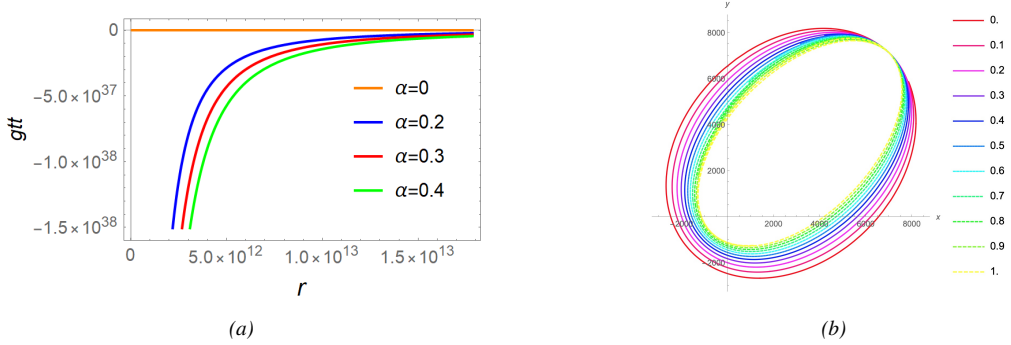


Figura 4: En la figura 4a podemos ver el efecto del parámetro α en la componente g_{tt} y en la figura 4b notamos la importancia de dicho parámetro en el tamaño de las orbitas.

5 | Método de Shandrashekhar para calcular la energía

Las geodésicas para partículas masivas (estrellas) son las siguientes:

$$\Sigma^2(U')^2 = T^2 - \Delta[r^2 + (L - aE)^2 + k] = V^2(r), \quad (37)$$

$$T = E(r^2 + a^2) - La, \quad (38)$$

$$V(r) = [E(r^2 + a^2) - La]^2 - (r^2 - 2GMr + a^2 + M_\beta) * [r^2 + (L - aE)^2 + k], \quad (39)$$

hacemos $x = L - aE$ (Shandrashekhar)

$$V(r) = [Er^2 + a^2E - La]^2 - (r^2 - 2GMr + a^2 + M_\beta) * [r^2 + (L - aE)^2 + k]. \quad (40)$$

De modo que el potencial gravitacional queda expresado en términos de la energía, el momento angular, los parámetros del agujero negro a y M y el parámetro de deformación α , * denota el producto.

$$V(r) = [Er^2 - a(L - aE)]^2 - (r^2 - 2GMr + a^2 + M_\beta) * [r^2 + (L - aE)^2 + k], \quad (41)$$

$$\boxed{V(r) = (Er^2 - ax)^2 - (r^2 - 2GMr + a^2 + M_\beta) * (r^2 + x^2 + k)} \quad (42)$$

Derivando $V(r)$ tenemos $V'(r)$ con respecto a r

$$V'(r) = \frac{dV(r)}{dr}, \quad (43)$$

$$= 2(Er^2 - ax)(2Er) - (2r - 2GM)(r^2 + x^2 + k) - (r^2 - 2GMr + a^2 + M_\beta) * (2r), \quad (44)$$

$$V'(r) = 2r(2)(r^2E^2 - aEx) - 2r \left(1 - \frac{GM}{r}\right) (r^2 + x^2 + k) - 2r(r^2 - 2GMr + a^2 + M_\beta), \quad (45)$$

$$\boxed{V'(r) = 2r \left[2(r^2E^2 - aEx) - \left(1 - \frac{GM}{r}\right) (r^2 + x^2 + k) - (r^2 - 2GMr + a^2 + M_\beta) \right]} \quad (46)$$

Las condiciones para que las órbitas sean estables son las siguientes:

1. $V(r) = 0$,
2. $V'(r) = 0$,

Hacemos $G = 1$

$$E^2 = [u^{-4} - GMu^{-3} + GMx^2u^{-1} + GMku^{-1} - M_{\beta}x^2 - a^2k - M_{\beta}k]u^4, \quad (47)$$

$$E^2 = (u^{-4} - Mu^{-3} + Mx^2u^{-1} + Mku^{-1} - M_{\beta}x^2 - a^2k - M_{\beta}k)u^4, \quad (48)$$

$$E^2 = 1 - Mu + Mx^2u^3 + Mku^3 - M_{\beta}x^2u^4 - a^2ku^4 - M_{\beta}ku^4, \quad (49)$$

$$E^2 = (1 - Mu) + x^2(M - M_{\beta}u)u^3 + [M - (M_{\beta} + a^2)u]ku^3, \quad (50)$$

$$\boxed{E^2 = (1 - Mu) + x^2(M - M_{\beta}u)u^3 + [M - (M_{\beta} + a^2)u]ku^3} \quad (51)$$

La ecuación (51) es la expresión para la energía, la cual es una cantidad conservada, cuando la constante de Carter es cero ($k = 0$) se recuperan los resultados publicados.

6| Geodésicas de partículas masivas

Para órbitas cerradas la energía debe ser negativa $E < 1$, lo cual indica que el cuerpo permanece ligado, las ecuaciones geodésicas para partículas masivas con constantes de movimiento E , L y k están codificadas en U^i , como la órbita es circular $U^r = 0$ y estamos fuera del plano ecuatorial $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, las expresiones para las velocidades de las partículas geodésicas son:

$$\begin{cases} U^t = [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta]E - (r^2 + a^2 - \Delta)aL, \\ U^r = \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{E}{\Sigma} + \left[a - \frac{(r^2 + a^2)}{\Delta} \right] \frac{aL}{\Sigma}, \\ U^{\theta} = \frac{\pm \sqrt{k - \left[a^2(1 - E^2) + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right] \cos^2 \theta}}{\Sigma}, \\ U^{\phi} = \frac{aT}{\Delta \Sigma} - \frac{aE}{\Sigma} + \frac{L}{\Sigma \sin^2 \theta}. \end{cases} \quad (52)$$

Donde $T \equiv E(r^2 + a^2) - La$.

7| Geodésicas de fotones

Los fotones a diferencia de las partículas masivas pueden escapar del horizonte de sucesos y viajar por el espacio siguiendo geodésicas nulas en un plano no ecuatorial (Chandrasekhar, 1983). Las ecuaciones geodésicas que describen el movimiento de los fotones en el espacio tiempo del agujero negro de Kerr con MOG y con parametros constantes E_{γ} , L_{γ} y k_{γ} , quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \Delta \Sigma k^t = [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta]E_{\gamma} - (r^2 + a^2 - \Delta)aL_{\gamma}, \\ \Sigma^2 (k^r)^2 = T_{\gamma}^2 - \Delta[(L_{\gamma} - aE_{\gamma})^2 + k_{\gamma}], \\ \Sigma^2 (k^{\theta})^2 = k_{\gamma} - \left[-a^2 E_{\gamma}^2 + \frac{L_{\gamma}^2}{\sin^2 \theta} \right] \cos^2 \theta, \\ (\Delta \Sigma \sin^2 \theta) k^{\phi} = a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)E_{\gamma} + (\Delta - a^2 \sin^2 \theta)L_{\gamma}. \end{cases} \quad (54)$$

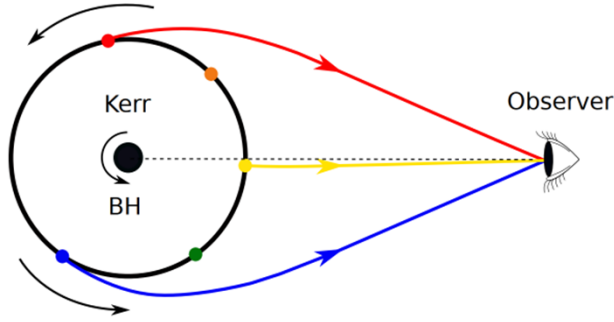


Figura 5: La figura muestra el redshift de los fotones emitidos por una estrella que órbita un agujero negro de Kerr tomado de (Banerjee y cols., 2022)

Donde $T_\gamma = (r^2 + a^2)E_\gamma - aL_\gamma$.

De modo que para órbitas no ligadas $E \geq 1$, y las componentes del cuadrivector k^ν para los fotones son las siguientes:

$$\begin{cases} k^t = \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{E_r}{2} + \left[a - \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} \right] \frac{aL - \gamma}{\Sigma}, \\ k^r = \pm \sqrt{\frac{T_\gamma^2 - \Delta[(L_\gamma - aE_\gamma)^2] + k_\gamma}{\Sigma}}, \\ k^\theta = \pm \sqrt{\frac{k - \left[-a^2 E_\gamma^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right]}{\Sigma}}, \\ k^\phi = \frac{aT_\gamma}{\Delta \Sigma} - \frac{aE_\gamma}{\Sigma} + \frac{\Sigma L}{\sin^2 \theta}, \end{cases} \quad (55)$$

$$T_\gamma = (r^2 + a^2)E_\gamma - aL_\gamma. \quad (56)$$

8 | Cálculo del corrimiento al rojo y al azul de fotones emitidos por estrellas orbitando un agujero negro

Necesitamos calcular la expresión para los desplazamientos al rojo y al azul en términos de las frecuencias de los fotones detectados, para lo cual debemos expresar las frecuencias de un fotón en términos de las cuadrivelocidades $U_{e/d}^\nu$ y los cuadrivectores $K_{e/d}^\nu$ medidas por un observador localizado en un punto D .

$$v_{e/d} = -K_\mu U^\mu \Big|_{D_{e/d}}. \quad (57)$$

Donde el índice e/d , (e) es para el emitido y (d) el detectado en el espacio-tiempo del punto D Sheoran y cols. (2018), las velocidades de las partículas masivas $U_{e/d}^v$ y los momentos de los fotones $K_{e/d}^v$ son:

$$\begin{cases} U_e^v = (U^t, U^r, U^\theta, U^\phi)|_e \\ U_d^v = (U^t, U^r, U^\theta, U^\phi)|_d \\ K_e^v = (K^t, K^r, K^\theta, K^\phi)|_e \\ K_d^v = (K^t, K^r, K^\theta, K^\phi)|_d. \end{cases} \tag{58}$$

Con la frecuencia de los fotones $v_{e/d} = -(K_\mu U^\mu)|_{e/d}$ podemos calcular los corrimientos al rojo y al azul a partir de la expresión general, la cual es:

$$z = \frac{v_e - v_d}{v_d} = \frac{v_e}{v_d} - 1, \tag{59}$$

$$1 + z = \frac{v_e}{v_d}, \tag{60}$$

$$1 + z = \frac{(EK^t - LK^\phi - g_{rr}U^rK^r - g_{\theta\theta}U^\theta K^\theta)}{(EK^t - LK^\phi - g_{rr}U^rK^r - g_{\theta\theta}U^\theta K^\theta)}, \tag{61}$$

$$1 + z = \frac{(E_\gamma U^t - L_\gamma U^\phi - g_{rr}U^rK^r - g_{\theta\theta}U^\theta K^\theta)}{(E_\gamma U^t - L_\gamma U^\phi - g_{rr}U^rK^r - g_{\theta\theta}U^\theta K^\theta)}. \tag{62}$$

En las ecuaciones (61) y (62) hemos hecho uso de los vectores de Killing para expresar los desplazamientos en función de la energía y el momento angular las cuales son cantidades que se conservan (Sheoran y cols., 2018).

Como la órbita es circular entonces ($U^r = 0$) y las expresiones nos quedan de la siguiente forma:

$$1 + z = \frac{(Ek^t - LK^\phi - g_{\theta\theta}U^\theta k^\theta)}{(EK^t - Lk^\phi - g_{\theta\theta}U^\theta K^\theta)}, \tag{63}$$

$$1 + z = \frac{E_\gamma U^t - L_\gamma U^\phi - g_{\theta\theta}U^\theta k^\theta}{E_\gamma U^t - L_\gamma U^\phi - g_{\theta\theta}U^\theta K^\theta}. \tag{64}$$

Como el parámetro de impacto es $b = L_\gamma/E_\gamma$ podemos manipular la expresión a fin de introducir este en los desplazamientos al rojo y al azul

$$1 + z = \frac{E_\gamma(U_e^t - (L_\gamma/E_\gamma)U_e^\phi - (g_{\theta\theta}/E_\gamma)U_e^\theta k_e^\theta)}{E_\gamma(U_d^t - (L_\gamma/E_\gamma)U_d^\phi - (g_{\theta\theta}/E_\gamma)U_d^\theta k_d^\theta)}, \tag{65}$$

$$1 + z = \frac{U_e^t - b_e U_e^\phi - (g_{\theta\theta}/E_\gamma)U_e^\theta k_e^\theta}{U_d^t - b_d U_d^\phi - (g_{\theta\theta}/E_\gamma)U_d^\theta k_d^\theta}. \tag{66}$$

En la cinemática del desplazamiento al rojo, el valor central del parámetro de impacto es $b = 0$ lo cual permite expresar lo siguiente:

$$\implies 1 + z_c = \frac{U_e^t - (g_{\theta\theta}/E_\gamma)U_e^\theta k_e^\theta}{U_d^t - (g_{\theta\theta}/E_\gamma)U_d^\theta k_d^\theta}. \tag{67}$$

Si restamos (66) y (67) obtenemos lo siguiente:

$$z_k = (1 + z) - (1 + z_c) = z - z_c, \quad (68)$$

$$z_k = \frac{b_d U_d^\Phi U_e^\theta - b_e U_e^\Phi U_d^\theta + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) [b_e U_e^\Phi U_d^\theta k_d^\theta - b_d U_d^\Phi U_e^\theta k_e^\theta]}{U_d^\theta (U_d^\theta - b_d U_d^\Phi) + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) U_d^\theta k_d^\theta \left[b_d U_d^\Phi - U_d^\theta + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) U_d^\theta k_d^\theta \right]} \quad (69)$$

Esta es la expresión general para el corrimiento al rojo y al azul, donde el subíndice k es una etiqueta que puede ser reemplazada por r ó b , podemos notar que cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$ regresamos al caso del plano ecuatorial ya que $U_e^\theta = 0$ y $U_d^\theta = 0$.

Recordamos que $M_\alpha = GM$, $M_\beta = \alpha M^2 GG_N$.

$$b_\pm = L_\gamma / E_\gamma. \quad (70)$$

Debemos tomar en cuenta que $b_e = b_d$ a lo largo de las trayectorias de los fotones, estos dos valores dan dos desplazamientos diferentes los cuales son:

$$z_r = \frac{U_d^\Phi U_e^\theta b_{d-} - U_e^\Phi U_d^\theta b_{e-} + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) [U_e^\Phi U_d^\theta k_d^\theta b_{e-} - U_d^\Phi U_e^\theta k_e^\theta b_{d-}]}{U_d^\theta (U_d^\theta - U_d^\Phi b_{d-}) + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) \left[U_d^\Phi b_{d-} - 2U_d^\theta + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) U_d^\theta k_d^\theta \right] U_d^\theta k_d^\theta}, \quad (71)$$

$$z_b = \frac{U_d^\Phi U_e^\theta b_{d+} - U_e^\Phi U_d^\theta b_{e+} + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) [U_e^\Phi U_d^\theta k_d^\theta b_{e+} - U_d^\Phi U_e^\theta k_e^\theta b_{d+}]}{U_d^\theta (U_d^\theta - U_d^\Phi b_{d+}) + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) \left[U_d^\Phi b_{d+} - 2U_d^\theta + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) U_d^\theta k_d^\theta \right] U_d^\theta k_d^\theta}. \quad (72)$$

Estos son los resultados más importantes de este trabajo, en los cuales estamos considerando órbitas circulares fuera del plano ecuatorial.

9 | Región Kerr MOG para un campo gravitacional fuerte

Si en las ecuaciones para los desplazamientos al rojo y al azul, ecuaciones (71) y (72) consideramos límites para el parámetro a podemos establecer un intervalo de valores para los z_r y z_b . El límite inferior para el parámetro a ocurre cuando $a = 0$ y el límite superior ocurre cuando $|a| = \frac{M_\alpha}{\sqrt{1 + \alpha}}$, de esta manera los intervalos para los desplazamientos al rojo y al azul son los siguientes:

$$z_r^{\min} \leq z_r \leq z_r^{\max} \quad \text{y} \quad z_b^{\min} \leq z_b \leq z_b^{\max}. \quad (73)$$

Los z_r^{\min} y z_b^{\min} tienen la misma magnitud pero diferente signo, si los datos obtenidos experimentalmente caen dentro de este intervalo nuestra aproximación mediante gravedad modificada es adecuada.

10 | Región para relatividad general en un campo gravitacional fuerte

De la misma forma, si consideramos las expresiones para los desplazamientos al rojo y al azul, ecuaciones (71) y (72) y hacemos el parámetro de deformación igual a cero ($\alpha = 0$), con lo cual estamos en el régimen de la Relatividad General, esto nos permite establecer un intervalo de valores para los desplazamientos al rojo y al azul los cuales son:

$$z_r^{\min} \leq z_r^{\text{kerr}} \leq z_r^{\max} \quad \text{y} \quad z_b^{\min} \leq z_b^{\text{kerr}} \leq z_b^{\max}. \quad (74)$$

De manera que si el conjunto de datos obtenidos experimentalmente para los desplazamientos al rojo y al azul están dentro de estos intervalos, implica que el agujero negro es de Kerr.

III | ANÁLISIS NUMÉRICO

En esta sección presentamos nuestros resultados para los parámetros del agujero negro de Kerr-MOG. Por simplicidad, presentamos el caso de una órbita circular y en el plano ecuatorial, en primera instancia porque nos permite validar nuestros resultados con los publicados previamente en la literatura. Sin embargo, el cálculo para un escenario más general está en proceso y serán publicados en un segundo trabajo.

1 | Escenario para una órbita circular en el plano ecuatorial

Los resultados obtenidos en las ecuaciones (71) y (72) que dan los desplazamientos al rojo y al azul son para órbitas circulares no ecuatoriales, las cuales deben satisfacer la siguiente condición ($U^r = 0$), para comprobar que nuestros cálculos de los desplazamientos al rojo y al azul (z_r y z_b) son correctos hacemos el caso especial para el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$) en donde las cuadrivelocidades U^θ y K^θ son cero ($U^\theta = 0, K^\theta = 0$)

$$z_r = \frac{U_d^\phi U_e^\phi b_{d-} - U_e^\phi U_d^\phi b_{e-} + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) \left[\cancel{U_e^\phi U_d^\theta K_d^\theta b_{e-}} - \cancel{U_d^\phi U_e^\theta K_e^\theta b_{d-}} \right]}{U_d^t (U_d^t - U_d^\phi b_{d-}) + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) \left[U_d^\phi b_{d-} - 2U_d^t + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) \cancel{U_d^\theta K_d^\theta} \right] \cdot \cancel{U_d^\theta K_d^\theta}^0} \quad (75)$$

$$z_r = \frac{U_d^\phi U_e^\phi b_{d-} - U_e^\phi U_d^\phi b_{e-}}{U_d^t (U_d^t - U_d^\phi b_{d-})}. \quad (76)$$

Y para el z_b tenemos al hacer $U^\theta = 0$ y $K^\theta = 0$

$$z_b = \frac{U_d^\phi U_e^\phi b_{d+} - U_e^\phi U_d^\phi b_{e+} + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) \left[\cancel{U_e^\phi U_d^\theta K_d^\theta b_{e+}} - \cancel{U_d^\phi U_e^\theta K_e^\theta b_{d+}} \right]}{U_d^t (U_d^t - U_d^\phi b_{d+}) + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) \left[U_d^\phi b_{d+} - 2U_d^t + \left(\frac{g_{\theta\theta}}{E_\gamma}\right) \cancel{U_d^\theta K_d^\theta} \right] \cdot \cancel{U_d^\theta K_d^\theta}^0}, \quad (77)$$

$$z_b = \frac{U_d^\phi U_e^\phi b_{d+} - U_e^\phi U_d^\phi b_{e+}}{U_d^t (U_d^t - U_d^\phi b_{d+})}. \quad (78)$$

De esta manera nuestros cálculos coinciden con los resultados ya publicados (Sheoran y cols., 2018), en los cuales se consideran órbitas circulares en el plano ecuatorial, en donde la constante de Carter k es igual a cero.

Cuando estamos en el plano ecuatorial donde $\theta = \frac{\pi}{2}$ y la constante de Carter k es igual a cero, las expresiones para los desplazamientos al rojo y al azul son:

$$z_r = \frac{U_d^\Phi U_e^\dagger b_{d-} - U_e^\Phi U_d^\dagger b_{e-}}{U_d^\dagger (U_d^\dagger - U_d^\Phi b_{d-})}, \quad (79)$$

$$z_b = \frac{U_d^\Phi U_e^\dagger b_{d+} - U_e^\Phi U_d^\dagger b_{e+}}{U_d^\dagger (U_d^\dagger - U_d^\Phi b_{d+})}. \quad (80)$$

De este modo las expresiones para los desplazamientos al rojo y al azul quedan de forma más compacta y a partir de ellos se pueden encontrar los parámetros del agujero negro de forma analítica. Así mismo la energía que antes obtuvimos fuera del plano ecuatorial se simplifica al resultado ya publicado haciendo $k = 0$.

$$E^2 = (1 - M_\alpha u) + x^2 (M_\alpha - M_\beta u) u^3 + [M_\alpha - (M_\beta + a^2) u] \cdot k a^3, \quad (81)$$

$$E^2 = (1 - M_\alpha u) + x^2 (M_\alpha - M_\beta u) u^3. \quad (82)$$

2 | Expresiones para M y a en términos de z_r y z_b

A partir de las ecuaciones (80) y (81) para los desplazamientos al rojo y al azul podemos resolver para encontrar la masa M y el parámetro de rotación a del agujero negro de Kerr, y tomando las siguientes definiciones:

$$\begin{cases} M_\alpha = (1 + \alpha)M, \\ M_\beta = \frac{\alpha}{(1 + \alpha)}M_\alpha^2. \end{cases} \quad (83)$$

La expresión para a es:

$$a^2 = \frac{\lambda r_e^4 (r_0^2 - 2M_\alpha r_e + M_\beta)}{(2M_\alpha r_e + M_\beta)^2 \eta - \lambda r_e^4} \quad (84)$$

Donde $\eta = (z_r - z_b)^2$ y $\lambda = (z_r + z_b)^2$ y r_e es el radio de la estrella orbitando el agujero negro (Sheoran y cols., 2018).

La ecuación para la masa M_α se puede calcular a partir de las ecuaciones (79), (80) y (84) dando como resultado:

$$\begin{aligned} & \{ (r_e^2 + 2M_\beta - 3M_\alpha r_e)(r_e^2 - 2M_\alpha r_e + M_\beta) \times [(2M_\alpha r_e + M_\beta)^2 \eta - \lambda r_e^4] \\ & - 4r_e^3 \bar{\omega}_e (2M_\alpha r_e + M_\beta)^2 \}^2 \\ & = 4\lambda r_e^5 \bar{\omega}_e (r_e^2 - 2M_\alpha r_e + M_\beta)^3 [(2M_\alpha r_e - M_\beta)^2 \eta - \lambda r_e^4]. \end{aligned} \quad (85)$$

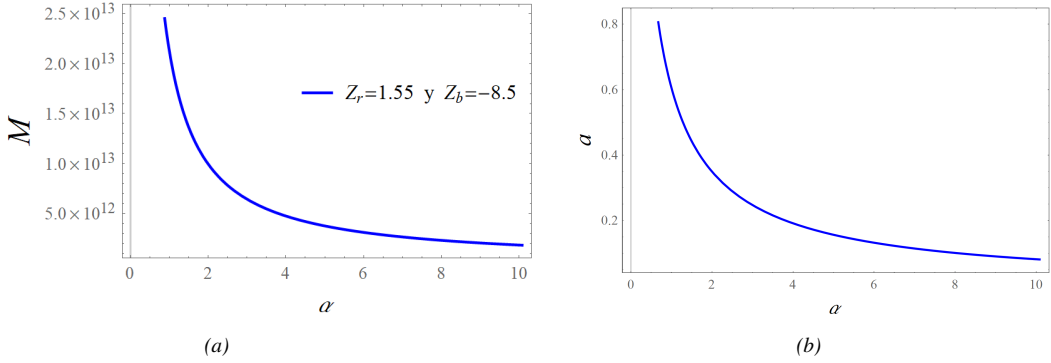


Figura 6: En la figura 6a podemos apreciar la variación de M vs α , en la figura 6b la variación del parámetro a vs α .

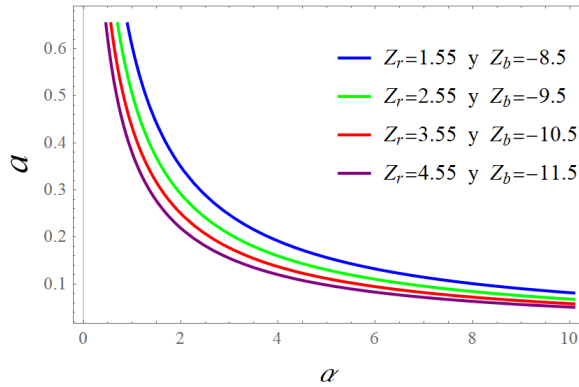


Figura 7: En la figura podemos ver la variación del parámetro a vs α para diferentes valores de los desplazamientos al rojo y al azul.

Donde $\bar{\omega}_e = M_\alpha - \frac{M_\beta}{r}$ es la velocidad angular del emisor que en este caso es la estrella orbitando el agujero negro, esta ecuación para M es un polinomio de orden 16 y no puede resolverse analíticamente (Sheoran y cols., 2018). Cuando resolvemos para M obtenemos 16 raíces de las cuales algunas son complejas y otras negativas, de manera que tomamos una raíz positiva para poder obtener un valor para el parámetro de rotación a .

En la figura 6a podemos ver la variación de la masa M del agujero negro en función del parámetro de deformación α para los desplazamientos $z_r = 1.55$ y $z_b = 8.5$. Cuando el parámetro α crece la masa disminuye.

La figura 6b representa la variación de el espín a vs el parámetro de deformación α , cuando el parámetro α crece a disminuye, La figura 7 muestra la variación de a vs α para diferentes valores de los desplazamientos al rojo y al azul.

En la figura 8 podemos apreciar como varia el parámetro de rotación a para rangos de los desplazamientos al rojo y al azul y para distintos valores de α .

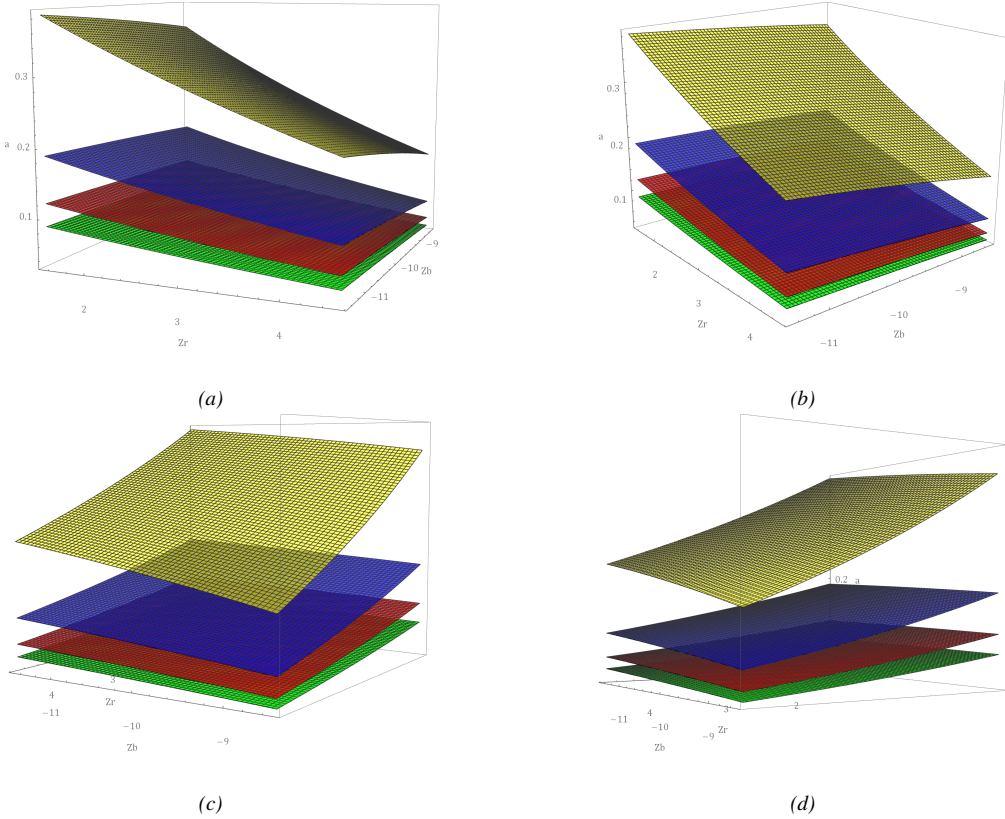


Figura 8: Las figuras 8a , 8b , 8c y 8d muestran la variación de a vs α para diferentes valores de z_r y z_b desde diferentes ángulos.

IV | CONCLUSIONES

Hemos calculado expresiones algebraicas para la masa y el parámetro de rotación de un agujero negro de Kerr MOG en términos del corrimiento al rojo y al azul de fotones emitidos por partículas geodésicas masivas. Nuestro resultado es válido para órbitas circulares fuera del plano ecuatorial. Los métodos implementados en este trabajo son válidos para cualquier métrica. Partiendo de nuestro resultado general, si se considera el escenario de órbitas circulares y plano ecuatorial, obtenemos resultados que han sido publicados (Herrera et al, 2018).

Como trabajo futuro, nos interesa utilizar la Data experimental de los corrimientos al rojo y al azul de estrellas orbitando el agujero negro, y verificar si nuestros resultados para z_r y z_b pueden ser útiles para probar la teoría de la relatividad general para campos gravitacionales fuertes, o bien, para predecir pequeñas desviaciones de esta que impliquen una teoría de gravedad modificada. Además, nos gustaría resolver al menos numéricamente el caso de órbitas elípticas y fuera del plano ecuatorial, que es el caso más general posible.

V | AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a Carlos Romero y en especial a Carlos Gabarrete por sus valiosos comentarios sobre el manuscrito. De igual manera, B.L. agradece a David Espinoza por los aportes y críticas que ayudaron a mejorar este trabajo.

I | REFERENCIAS

- Bambi, C., y Cosmol, J. (2011). *Astropart. Physics*(009).
- Banerjee, P., Herrera-Aguilar, A., Momennia, M., y Nucamendi, U. (2022). Mass and spin of a kerr black hole in terms of observational quantities: The dragging effect on the redshift. *arXiv, 2203.09092v1*.
- Bardeen, J., Press, W., y Teuklsky, S. (1972). *Astrophysics journal* 178(347).
- Carroll, S. (2016). *Spacetime and geometry*. Pearson Education.
- Chandrasekhar, S. (1983). *The mathematical theory of black holes*. New York: Oxford University Press.
- Ghez, A., Salim, S., Hornstein, S., Tanner, A., Lu, J., Morris, M., . . . Duchene, G. (2004). Stellar orbits around the galactic center black hole. *arXiv, astro-ph/0306130v2*.
- Ghez, A., Salim, S., Weinberg, N., Lu, J., Do, T., Dunn, J., . . . Naiman, J. (2008). Measuring distance and properties of the milky ways central supermassive black hole with stellar orbits. *arXiv, 0808.2870v1*.
- Herrera-Aguilar, A., y Nucamendi, U. (2015). *Physics review*(045024).
- Johannsen, T. (2016). *Classical Quantum Gravity* 33(113001).
- Manko, V., y Novikov, I. (1992). *Classical quantum gravity*(2477).
- Miramontes, O., y Volke, K. (2013). *Fronteras de la física en el siglo xxi*. México, D.F.: Copi arXives.
- Moffat, J. (2005). Scalar-tensor-vector gravity theory. *arXiv, gr-qc/0506021v7*.
- Moffat, J. (2015). *Eur. Physics journal*(175).
- Sheoran, P., Herrera-Aguilar, A., y Nucamendi, U. (2018). Mass and spin of a kerr black hole in modified gravity and a test of the kerr black hole hypothesis. *arXiv, 1712.03344v2*.
- Will, C. (1993). *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Yagi, K., y Stein, L. (2016). *Classical Quantum Gravity* 33(054001).