

# Absorción de radiación en átomos y su aplicación en la experimentación

ROBERTO ENRIQUE MEJIA CASTELLANOS

Universidad Nacional Autónoma de Honduras

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

rexar.ingenieria@gmail.com

## Resumen

*Este artículo muestra un breve desarrollo de la exposición de los átomos a ondas electromagnéticas y como los resultados son aplicables dentro de la experimentación a determinación de constantes como la razón  $\hbar/m$  donde  $m$  es la masa atómica del elemento utilizado; así como la constante de estructura fina  $\alpha$ , con alta precisión. Preliminarmente se hace el tratamiento teórico correspondiente utilizando la teoría de perturbación dependiente del tiempo ya que la configuración experimental utiliza interferometría atómica con pares de pulsos  $\pi/2$ , esto permite estados deseados en los átomos; posteriormente se efectúa el análisis experimental exponiendo un desarrollo de la interferometría atómica utilizando diferentes configuraciones y mostrando resultados obtenidos en experimentos previos.*

## I. INTRODUCCIÓN

EL presente trabajo esta basado en estudios previos de interferometría atómica como los realizados por M. Cadoret, E De Mirades, P Cladé y colaboradores en el laboratorio *Laboratoire Kastler Brossel* [9]; D.S. Weiss, B.C. Young, S. Chu, Universidad de Stanford [23]; MarkKasevich, Steven Chu, Universidad de Stanford [17]; A. Witch, J. Hensley y Colaboradores, Universidad de Stanford [25]; y particularmente en el trabajo hecho por M. Cadoret, E. De Mirandes, P. Cladé, F. Nez, L. Julien, F. Biraben and S. Guellati-Khélifa. Paris Francia, 2008 [10], entre otros. El enfoque está en un desarrollo teórico y como se utilizan los resultados experimentales en aplicaciones como la determinación con alta precisión de la razón  $\hbar/m$  y la constante de estructura fina  $\alpha$ .

Desde el punto de vista teórico se hace el tratamiento aplicando teoría de perturbación dependiente del tiempo a un sistema de dos niveles, se obtiene la ecuación de probabilidad de transición en función de los estados inicial y final así como las frecuencias del sistema dadas por los pulsos  $\pi/2$ , utilizando la deducciones de interferometría como las del Interferómetro Asimétrico de Ramsey-Bordé para cuatro pulsos (pares de pulsos  $\pi/2$  en direcciones opues-

tas) [13]. Desde el punto de vista experimental su fundamento principal es el uso de la interferometría láser considerando la interferencia atómica [5][24] de los estados internos para medir las frecuencias de retroceso por medio de las Oscilaciones de Bloch [13] al transferir coherentemente el momento del fotón al átomo del elemento a utilizar.

Los experimentos efectuados mediante interferometría atómica de luz se han convertido en una teoría de selección para mediciones en alta precisión, esta metodología ha beneficiado también al desarrollo de la tecnología láser.

## I. Análisis de un Sistema de dos Niveles Interactuando con Ondas Viajeras

Utilizaremos el tratamiento expuesto en la teoría de perturbación dependiente del tiempo para determinar la función de ondas del sistema de dos niveles  $|g\rangle$  y  $|e\rangle$ . Consideremos un sistema de dos niveles ( $|g\rangle$  y  $|e\rangle$ ) con energías respectivas  $\hbar\omega_g$  y  $\hbar\omega_e$ , existe un campo electromagnético que interactúa con el átomo y cede energía, el hamiltoniano del sistema resulta:

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hbar\omega_e|e\rangle\langle e| + \hbar\omega_g|g\rangle\langle g| \\
 & + [\hbar\Omega e^{i(k\hat{x}-\omega t)}|e\rangle\langle g| + \hbar\Omega^* e^{-i(k\hat{x}-\omega t)}|g\rangle\langle e|] \quad (1)
 \end{aligned}$$

Este hamiltoniano representa las energías que se involucran en el sistema de dos niveles, el primer término corresponde a la energía cinética asociada con el momento del estado atómico, los dos siguientes términos representan las energías propias de los estados, es decir la energía del átomo en el estado inicial  $|g\rangle$  y la energía del átomo en el estado final  $|e\rangle$ . El último término entre paréntesis es la energía de interacción llamada energía de Rabi, real y dependiente del campo electromagnético que une los estados, el campo electromagnético tiene frecuencia  $\omega$  y vector de onda  $\vec{k}$ . Para obtener energías asociadas con los estados  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ ,  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$  aparece la frecuencia de Rabi  $\Omega$  como constante de acoplamiento; el término conjugado es debido a la hermiticidad del hamiltoniano que permite obtener energías reales. Empezaremos nuestro análisis considerando la teoría de perturbación dependiente del tiempo para un sistema de dos niveles, la teoría desarrollada sobre este tema por *David J. Griffiths, Introduccion to Quantum Machanics* [16] se basa en el cálculo de los coeficientes  $c_g(t)$  y  $c_e(t)$  que son función del tiempo en la parte que corresponde a la solución dependiente del tiempo  $\psi(\vec{r}, t)$ , en este caso la solución a la ecuación de Schrödinger es de la forma

$$\Psi(\vec{r}, t) = c_g(t)\psi_g e^{-iE_g t/\hbar} + c_e(t)\psi_e e^{-iE_e t/\hbar} \quad (2)$$

En los estados  $\psi_g = |g, \vec{p}_g\rangle$  y  $\psi_e = |e, \vec{p}_e\rangle$  los términos  $\vec{p}_g$  y  $\vec{p}_e$  son los momentos asociados a esos estados, se debería considerar explícitamente la propagación de ondas paquete para lograr calcular los cambios de fase entre los patrones de interferencia de la propagación en el espacio libre y la interacción de la luz con el átomo. Una técnica usual es considerar ondas paquete como la suma de los momentos de los estados de onda plana, el estado “final”  $|e, \vec{p}_e\rangle$  es aquel en donde el fotón ha transferido su momento al átomo, considerando el espacio del momento

$$\begin{aligned}
 e^{i\vec{k}\cdot\hat{x}}|\vec{p}\rangle &= (1 + i\vec{k}\cdot\hat{x})|\vec{p}\rangle \\
 &= \left[1 + i\vec{k}\cdot\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\right)\right]|\vec{p}\rangle \\
 &= |\vec{p}\rangle + \hbar\vec{k}\cdot\frac{\partial|\vec{p}\rangle}{\partial\vec{p}} = |\vec{p} + \hbar\vec{k}\rangle \quad (3)
 \end{aligned}$$

La ecuación (3) muestra que la absorción de un fotón con vector de onda  $\vec{k}$  cambia el momento atómico por  $\hbar\vec{k}$ ; el haz de luz une los estados cuánticos  $|g, \vec{p}_g\rangle = |g, \vec{p}\rangle$  y  $|e, \vec{p}_e\rangle = |e, \vec{p} + \hbar\vec{k}\rangle$ . Para expresar el hamiltoniano en términos de la fase  $\phi(t) = \delta t$  donde  $\delta = \omega - (\omega_e - \omega_g)$  se consideran los estados resultantes con energías  $\omega_g \hbar$  y  $\omega_e \hbar$ , utilizando la propiedad de superposición y linealidad.

$$\begin{aligned}
 |g\rangle &= e^{-i\frac{E_g t}{\hbar}}|\tilde{g}\rangle = e^{-i\omega_g t}|\tilde{g}\rangle \\
 |e\rangle &= e^{-i\frac{E_e t}{\hbar}}|\tilde{e}\rangle = e^{-i\omega_e t}|\tilde{e}\rangle \quad (4)
 \end{aligned}$$

Finalmente el último término en (1) se convierte en el hamiltoniano de interacción

$$\begin{aligned}
 H'(t) &= \hbar\Omega e^{i(k\hat{x}-\phi(t))}|\tilde{e}\rangle\langle\tilde{g}| \\
 &+ \hbar\Omega^* e^{-i(k\hat{x}-\phi(t))}|\tilde{g}\rangle\langle\tilde{e}| \quad (5)
 \end{aligned}$$

Debido a la perturbación provocada por el fotón los coeficientes de linealidad en las funciones de onda se expresan en función del tiempo.

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_{e,g} c_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle \quad (6)$$

Donde  $E_n$  representa las energías totales de los estados cuánticos, la mecánica cuántica muestra que esta ecuación cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(t)| = 1 \quad (7)$$

La energía de los átomos en su estado inicial (energía mínima inicial asociada con la energía interna del átomo) es  $E_g = |\vec{p}|^2/2m$ , donde  $|\vec{p}|$  es la magnitud del momento que presenta el átomo de masa atómica  $m$ . El estado  $|e\rangle$  después de la perturbación provocada por el fotón tiene ahora un momento  $|\vec{p} + \hbar\vec{k}|$  donde  $\hbar\vec{k}$  es el momento que cede el fotón al átomo, su energía final resulta

$$E_e = \frac{|\vec{p} + \hbar\vec{k}|^2}{2m} \quad (8)$$

Finalmente utilizando (5) tenemos la función de onda del modelo

$$|\Psi(\vec{r}, t)\rangle = a_{e, \vec{p} + \hbar \vec{k}}(t) |\tilde{e}, \vec{p} + \hbar \vec{k}\rangle e^{-i \frac{|\vec{p} + \hbar \vec{k}|^2}{2m\hbar} t} + a_{g, \vec{p}}(\tilde{g}, \vec{p}) e^{-i \frac{|\vec{p}|^2}{2m\hbar} t} \quad (9)$$

El estado  $|\tilde{g}, \vec{p}\rangle$  tiene frecuencia  $\omega_g$  con momento  $\vec{p}$  y el estado  $|\tilde{e}, \vec{p} + \hbar \vec{k}\rangle$  tiene frecuencia  $\omega_e$  con momento  $\vec{p} + \hbar \vec{k}$ . Ahora debemos determinar los coeficientes  $a_{e, \vec{p} + \hbar \vec{k}}(t)$  y  $a_{g, \vec{p}}(t)$  fundamentales para obtener predicciones y resultados reflejados en las probabilidades de transición; Utilizando la Teoría de Perturbación Dependiente del Tiempo se pueden determinar las coeficientes asociados a los estados  $a_e(t)$  y  $a_g(t)$ ; debemos considerar el sistema como perturbado por la onda electromagnética, con dependencia del tiempo de pulso que cambiará el estado  $|g\rangle$  al estado  $|e\rangle$

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad \text{donde} \quad H = H^o + H'(t) \quad (10)$$

Sustituyendo la solución propuesta (2) en (7) y resolviendo tenemos las siguientes ecuaciones diferenciales para los coeficientes de linealidad

$$\dot{c}_g = -\frac{i}{\hbar} H'_{ge} e^{-i\omega_o t} c_e, \quad \dot{c}_e = -\frac{i}{\hbar} H'_{eg} e^{i\omega_o t} c_g \quad (11)$$

Donde  $\omega_o = (E_e - E_g)/\hbar = \omega_e - \omega_g$ , nuestro análisis cumple que  $E_e \geq E_g$ , también se define  $H'_{ge}$  y  $H'_{eg}$  con los hamiltonianos de interacción

$$H'_{ij} = \langle \psi_i | H' | \psi_j \rangle \quad (12)$$

Utilizando (1) y (7) podemos determinar  $H'_{ge}$  y  $H'_{eg}$

$$\begin{aligned} H'_{ge} &= \langle g | H' | e \rangle \\ &= \langle g | \hbar \Omega * e^{-ik\hat{x}} | g \rangle e^{i\omega t} \\ &= \frac{V_{ge}}{2} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} H'_{eg} &= \langle e | H' | g \rangle \\ &= \langle e | \hbar \Omega e^{ik\hat{x}} | e \rangle e^{-i\omega t} \\ &= \frac{V_{eg}}{2} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (14)$$

Las magnitudes de estos hamiltonianos no son mas que la energía esperada en cada estado correspondiente a la onda electromagnética que se propaga en dirección  $k\hat{x}$ , cantidades que son medibles. Una propiedad importante que se observa en  $H'_{ij}$  es su hermiticidad  $H'_{ge} = (H'_{eg})^*$ ; utilizando (13) y (14) el hamiltoniano de interacción, como parte de la perturbación sinusoidal con dependencia del tiempo y dirección de propagación, toma la forma esperada

$$H'(\hat{x}, t) = V(\hat{x}) \cos(\omega t) \quad (15)$$

De aquí se tiene que  $V_{eg} = \langle e | V(\hat{x}) | g \rangle$ ,  $V_{ge} = \langle g | V(\hat{x}) | e \rangle$  de acuerdo con (10), utilizando estas características de la onda electromagnética resolvemos para  $c_g(t)$  y  $c_e(t)$

$$\begin{aligned} \dot{c}_g &= -i \frac{V_{ge}}{2\hbar} e^{i(\omega - \omega_o)t} c_e, \\ \dot{c}_e &= -i \frac{V_{eg}}{2\hbar} e^{-i(\omega - \omega_o)t} c_g \end{aligned} \quad (16)$$

Combinando tenemos ecuaciones diferenciales de segundo orden para los coeficientes de la función de onda

$$\begin{aligned} \ddot{c}_g - i\phi \dot{c}_g + \frac{|V_{eg}|^2}{4\hbar^2} c_g &= 0, \\ \ddot{c}_e + i\phi \dot{c}_e + \frac{|V_{ge}|^2}{4\hbar^2} c_e &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Donde  $\phi = \omega - \omega_o = \omega - (\omega_e - \omega_g)$ . Es necesario imponer las condiciones iniciales  $c_g(0) = 1$ ,  $c_e(0) = 0$  (antes de la perturbación solo existe el estado  $|g\rangle$ ), utilizando (16)  $\dot{c}_g(0) = 0$  y  $\dot{c}_e(0) = -i \frac{V_{eg}}{2\hbar}$ . Determinamos primero una solución para  $c_g(t)$

$$c_g(t) = A_1 e^{i(\phi/2 + \Omega/2)t} + A_2 e^{i(\phi/2 - \Omega/2)t} \quad (18)$$

Donde definiremos la *Frecuencia de Rabi*

$$\Omega = \sqrt{\phi^2 + |V_{ge}|^2 / \hbar^2} \quad (19)$$

Como hemos dicho  $\phi = \omega - (\omega_e - \omega_g)$ , utilizando las condiciones iniciales anteriormente expuestas

$$A_1 = \frac{\Omega/2 - \phi/2}{\Omega}, \quad A_2 = \frac{\Omega/2 + \phi/2}{\Omega} \quad (20)$$

Resultando

$$c_g(t) = \left[ \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) + i\frac{\phi}{\Omega}\text{sen}\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right] e^{i\frac{\phi}{2}t} \quad (21)$$

Un procedimiento similar es aplicado a (14) utilizando las correspondientes condiciones iniciales

$$c_e(t) = -i\frac{V_{eg}}{\Omega\hbar}e^{-i\frac{\phi}{2}t}\text{sen}\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \quad (22)$$

Finalmente obtenemos las soluciones a la ecuación de Schrödinger, con hamiltoniano en (1)

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & \left[ \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) - i\frac{\phi}{\Omega}\text{sen}\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right] \\ & \cdot e^{i(\phi/2 - E_g/\hbar)t} |\tilde{g}, \vec{p}\rangle \\ & - i\frac{V_{eg}}{\hbar\Omega}e^{-i(\phi/2 + E_e/\hbar)t} \\ & \cdot \text{sen}\left(\frac{\Omega}{2}t\right) |\tilde{e}, \vec{p} + \hbar\vec{k}\rangle \end{aligned} \quad (23)$$

La validez de (23) queda expuesta al aplicar (7), utilizando (21) y (22)

$$\begin{aligned} |c_g|^2 &= \cos^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right) + \frac{\phi^2}{\Omega^2}\text{sen}^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \\ |c_e|^2 &= \frac{|V_{ge}|^2}{2\hbar^2\Omega^2}(1 - \cos(\Omega t)) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} |c_g|^2 + |c_e|^2 &= \cos^2(\Omega/2t) \\ &+ \frac{\phi^2}{\Omega^2}\text{sen}^2(\Omega/2t) \\ &+ \frac{|V_{ge}|^2}{\hbar^2\Omega^2}\text{sen}^2(\Omega/2t) \\ &= \cos^2(\Omega/2t) \\ &+ \frac{1}{\Omega^2}[\phi^2 + |V_{ge}|^2/\hbar^2]\text{sen}^2(\Omega/2t) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Nuestro interés es ahora  $|c_{e, \vec{p} + \hbar\vec{k}}(t)|^2$ , la probabilidad de encontrar el átomo en el estado  $|e\rangle$  despues de la interacción a un tiempo  $\tau$

$$|c_{e, \vec{p} + \hbar\vec{k}}(t)|^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(\Omega\tau)) \quad (25)$$

Donde hemos utilizado

$$\begin{aligned} |V_{eg}|^2 &= V_{ge}V_{eg} \\ &= \hbar^2\Omega^2\langle g|e^{-ik\hat{x}}|g\rangle\langle e|e^{ik\hat{x}}|e\rangle \\ &= \hbar^2\Omega^2 \end{aligned} \quad (26)$$

Condición de normalización, de aquí se conoce el porque de las energías de interacción en (1). Tomando (25) podemos ahora configurar la duración de la perturbación y observar el comportamiento de la probabilidad de transición  $|g\rangle$  a  $|e\rangle$ .

*Caso 1*

Pulso de luz  $\pi/2$ , es decir  $\Omega\tau = \pi/2$

$$\begin{aligned} |\Psi\left(\frac{\pi}{2\Omega}\right)\rangle = & \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right. \\ & \left. - i\frac{\phi}{\Omega}\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] e^{i(\phi/2 - E_g/\hbar)\frac{\pi}{2\Omega}} |\tilde{g}, \vec{p}\rangle \\ & - i\frac{V_{eg}}{\hbar\Omega}e^{-i\phi t} e^{i(\phi/2 - E_e/\hbar)\frac{\pi}{2\Omega}} \\ & \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) |\tilde{e}, \vec{p} + \hbar\vec{k}\rangle \end{aligned} \quad (27)$$

La ecuación (27) se puede simplificar utilizando ciertas consideraciones:  $\phi = \omega - (\omega_e - \omega_g)$ ,  $\Omega = \sqrt{\phi^2 + |V_{ge}|^2/\hbar^2}$  la frecuencia del haz de luz incidente es mucho mayor que la diferencia de frecuencias  $\phi$ , es decir  $\Omega \gg \phi$ . Utilizando (9), donde  $E_g = \frac{|\vec{p}|^2}{2m}$ ,  $E_e = \frac{|\vec{p} + \hbar\vec{k}|^2}{2m}$ ; podemos asegurar que el valor de  $e^{-iE_g t/\hbar}$  y  $e^{-iE_e t/\hbar}$  tiende a la unidad ya que  $|\vec{p}|^2 \ll m\hbar\Omega$  y  $|\vec{p} + \hbar\vec{k}|^2 \ll m\hbar\Omega$ .

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |\tilde{g}, \vec{p}\rangle - ie^{-i\phi(t)} |\tilde{e}, \vec{p} + \hbar\vec{k}\rangle \right] \quad (28)$$

La exponencial en esta ecuación es la que menos se acerca a la unidad en comparación con las otras que se omitieron, esto se hace para tener un término dependiente del tiempo de pulso  $\pi/2$ .

*Caso 2*

Pulso de luz  $\pi$ , es decir  $\Omega\tau = \pi$ ; utilizando las consideraciones anteriores

$$|\Psi(t)\rangle = -ie^{-i\phi(t)} |\tilde{e}, \vec{p} + \hbar\vec{k}\rangle \quad (29)$$

Cuando el átomo es expuesto a pulsos  $\pi/2$  el momento del fotón  $\hbar\vec{k}$  coloca al átomo en coherentes e iguales superposiciones de ambos estados de energía, el retroceso impartido al átomo da origen a dos paquetes de onda coherentes (en cada estado interno) separados por una velocidad  $v_r = \hbar\vec{k}/m$ ; es otras palabras este pulso  $\pi/2$  juega un rol análogo al haz 50-50 en optica clásica [15]. por otro lado cuando escogemos  $\Omega_{eg}\tau = \pi$  (un pulso  $\pi$ ) la probabilidad de necontrar a átomo en  $|e, p + \hbar\vec{k}\rangle$  despues del tiempo  $\tau$  es igual a la unidad en este caso el pulso de luz se comporta como un espejo (todas las características del haz se observan en el átomo).

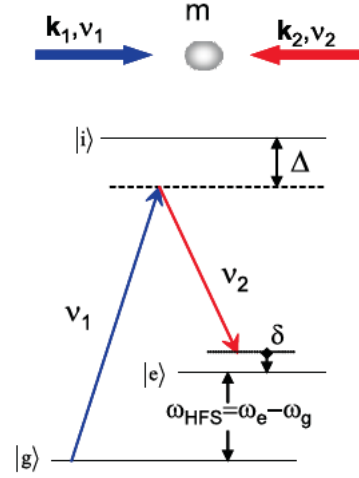
Debemos enfatizar que dos términos juegan un rol importante para el cálculo del cambio de fase en la interferometría atómica: la energía cinética  $p^2/2m$  y la fase  $\phi(t)$ ; este cambio depende la frecuencia del láser y de la energía interna de los átomos. En este caso particular nosotros hemos escogido una determinada frecuencia del láser ( $\lambda \sim 10^{-9}m$ ) y una energía interna constante del átomo; mas generalmente incluir las situaciones donde la diferencia  $\phi$  varíe atravez de la frecuencia del láser (donde definimos anteriormente  $\phi = \omega - (\omega_e - \omega_g)$ ;  $\phi(t) = \phi t$ ) o por medio de la energía de los niveles atómicos (cambio de luz Efecto Zeeman [26])), uno tiene que evaluar  $\phi(t) = \int \phi(t)dt$  (en este caso el integrando es función del tiempo es decir  $\omega - (\omega_e - \omega_g) \rightarrow f(t)$ ).

Hasta ahora hemos desatendido la emisión espontánea, esta omisión es válida para el caso en donde el estado final  $|e\rangle$  es suficientemente estable para que el decaimiento radiactivo durante la secuencia de pulsos sea despreciable. Para tomar ventaja de los tiempos de vida largos y resultados apreciables en el retroceso de los átomos, utilizando dos fotones simulando transiciones de Raman.

## II. Transiciones de Raman y Análisis Experimental

Consideremos un sistema de tres niveles ( $|g\rangle, |e\rangle, |i\rangle$ ) donde dos estados fundamentales de niveles hiperfinos  $|g\rangle, |e\rangle$  son relacionados por un estado intermedio  $|i\rangle$  por dos haces laser de frecuencias angulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$  y vectores de

onda  $\vec{k}_1$  y  $\vec{k}_2$  (Figura 1). Las constantes de acoplamiento son respectivamente las frecuencias de Rabi  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ .



**Figura 1:** Niveles de energía y frecuencias de laser usadas en transiciones de Raman

En el caso en donde los haces de Raman son lejos de ser seleccionados en resonancia con  $|g\rangle \rightarrow |i\rangle$  o  $|e\rangle \rightarrow |i\rangle$  para las transiciones de un fotón; en otras palabras los haces no excitarán un gran número de átomos al estado  $|i\rangle$  (la magnitud  $\Gamma_i$  del estado normal de  $|i\rangle$ ) debe ser mucho menor que el provocado por el haz) (Figura1); teniendo esta consideración podemos tratar al sistema como uno de dos niveles, es decir que la cantidad de átomos en el estado  $|i\rangle$  es despreciable, con una frecuencia efectiva de Rabi  $\Omega_{eff} = \Omega_1\Omega_2^*/2$  como constante de acoplamiento.

$$\begin{aligned} \Omega_{eff} &= \frac{\Omega_1\Omega_2^*}{2} \\ &= \frac{(\phi_1^2 + |v_{gi}|^2/\hbar^2)(\phi_2^2 + |v_{ie}|^2/\hbar^2)}{2} \end{aligned} \quad (30)$$

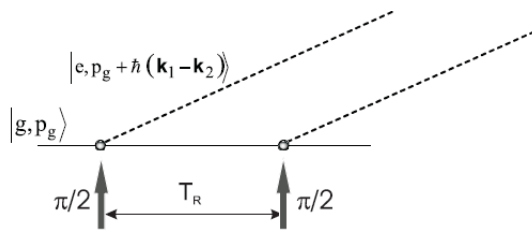
Donde  $\phi_1 = \omega_1 - (\omega_i - \omega_g)$ ,  $\phi_2 = \omega_2 - (\omega_e - \omega_i)$ ; esto puede ser tratado como el resultado de una haz de frecuencia  $\omega_1 - \omega_2$  con vector de onda efectivo  $\vec{k}_1 - \vec{k}_2$ .

Cuando los rayos de luz son contrapropagados ( $\vec{k}_1 - \vec{k}_2 \simeq 2\vec{k}_1$ ) la transición tiene una doble sensibilidad Doppler en comparación con la transición optica simple de un fotón (Figura1). Para átomos de Rubidio con peso atómico 87 el retroceso impartido se obtiene

de  $v_r = 2\hbar k/M \simeq 12\text{mm/s}$ ; es alrededor de cinco ordenes de magnitud mas grande que la correspondiente transición de un simple fotón en microonda.

### III. Tratamiento Teórico al Interferómetro de Ramsey-Bordé

La interferometría atómica basada en pulsaciones de luz es inspirada por los métodos de Ramsey en campos oscilatorios separados, introducida alrededor de 1950. Por consiguiente el plano mas básico en la interferometría atómica es la basada en secuencias de pulsación  $\pi/2 - \pi/2$ . Un tiempo después las secuencias de pulsación de dos pares de pulsos de laser  $\pi/2$  fueron propuestos por primera vez por [2] [11]. La interpretación de la cuarta zona del espectro de Ramsey en términos de la interferometría atómica con paquetes de onda separados fue sugerida por Bordé [6] [7]. Estos estudios desarrollaron posteriormente el conocido Interferómetro de Ramsey-Bordé. En esta sección analizaremos a este tipo de interferómetro comenzando de una configuración mas simple. Consideraremos que cada pulsación de luz lleva a una transición de Raman entre dos estados hiperfinos  $|g\rangle$  y  $|e\rangle$ . Calcularemos el cambio de fase entre patrones de interferencia en el caso de una simple secuencia  $\pi/2 - \pi/2$ , esto nos permitira tener una idea de como la fase en la ecuación de probabilidad de transición facilita obtener constantes como  $\hbar/m$ .



**Figura 2:** Diagrama de retroceso para el Interferómetro de Ramsey  $\pi/2 - \pi/2$

### IV. Configuración $\pi/2 - \pi/2$

Por propósitos pedagógicos, consideremos la configuración mas simple descrita en la Figura 2. Comenzaremos con la descripción de onda

plana para un átomo simple con momento  $\vec{p}$  en el estado interno  $|g\rangle$ . Este estado  $|g\rangle$  es acoplado a la onda plana de momento  $\vec{p} + \hbar\vec{k}_1 - \hbar\vec{k}_2$  via transición de Raman (dos haces de Raman contrapropagados con vectores y onda y frecuencias  $\vec{k}_1, \omega_1$  y  $\vec{k}_2, \omega_2$ ) respectivamente. Denotaremos a  $\vec{v}_g$  como la velocidad de los átomos en el estado  $|g\rangle$  y  $\vec{v}_e = \vec{v}_g + \hbar(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)/m$  la velocidad de estos átomos en el estado  $|e\rangle$ , esta claro el hecho de la transferencia de energía entre los haces y los átomos, esta energía de transferencia dependiente de la longitud de onda de los haces es  $\Delta E_{ge} = \hbar^2|\vec{k}_1 - \vec{k}_2|^2/2m$ . Después del primer pulso  $\pi/2$  al tiempo  $t_1$  los átomos se encuentran en una coherente superposición  $|\psi\rangle = (|g\rangle - ie^{-i\phi(t_1)}|e\rangle)/\sqrt{2}$  tal como lo muestra (24). Durante un tiempo  $T_R$  de libre propagación cada estado acumula una fase (es decir que su frecuencia varía en relación a la frecuencia natural de oscilación); después del primer pulso en un tiempo  $t_1$  mas un tiempo  $T_R$  mas tarde la función de onda se convierte en

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-i\phi_g}|g\rangle - ie^{-i(\phi_e + \phi(t_1))}|e\rangle] \quad (31)$$

Donde  $\phi_g$  y  $\phi_e$  son las frecuencias naturales de oscilación después de un tiempo  $T_R$  (considerando al átomo como una partícula libre).

$$\phi_g(T_R) = E_g t / \hbar \Big|_{t=T_R} = \frac{1}{2} m v_g^2 T_R / \hbar \quad (32)$$

$$\phi_e(T_R) = E_e t / \hbar \Big|_{t=T_R} = \frac{1}{2} m v_e^2 T_R / \hbar \quad (33)$$

Después del segundo pulso  $\pi/2$  en tiempo  $t_2$  el átomo se encuentra en el estado siguiente:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|g'\rangle - ie^{-i\phi(t_2)}|e'\rangle] \quad (34)$$

Podemos apreciar en (34) que el desfase para los átomos en  $|e'\rangle$  con respecto a los átomos en  $|e\rangle$  en  $\pi$  ya que el segundo haz de Raman esta dirigido en dirección opuesta al primero. Analizando la secuencia de estados durante todo el proceso en base a que el estado inicial es  $|g\rangle$  y después de un pulso  $\pi/2$  es  $|e\rangle$  podemos así identificar los estados  $|g'\rangle$  y  $|e'\rangle$  como:

$$|g'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\phi_g}|g\rangle - ie^{-i(\phi_e + \phi(t_1))}|e\rangle) \quad (35)$$

$$|e'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\phi_g}|e\rangle - ie^{-i(\phi_e+\phi(t_1))}|g\rangle) \quad (36)$$

El estado  $|g'\rangle$  es el inicial antes del segundo pulso, es decir los átomos que se encuentran en la superposición de estados coherentes después de ser sometidos al primer pulso  $\pi/2$ . El estado  $|e'\rangle$  esta representado por la transición de cada estado en  $|g'\rangle$  es decir que el otro pulso  $\pi/2$  para cada estado compuesto en  $|g'\rangle$  regresa  $|e'\rangle$  a  $|g\rangle$  y viceversa siempre el segundo haz tenga un vector de onda en dirección opuesta al del primer haz, sustituyendo (35) y (36) en (34).

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{2}[(e^{-i\phi_g}|g\rangle - ie^{-i(\phi_e+\phi(t_1))}|e\rangle) \\ &\quad - ie^{-i\phi(t_2)}(e^{-i\phi_g}|e\rangle \\ &\quad - ie^{-i(\phi_e+\phi(t_1))}|g\rangle)] \\ &= \frac{1}{2}[e^{-i\phi_g}|g\rangle - ie^{-i(\phi_e+\phi(t_1))}|e\rangle \\ &\quad - ie^{-i(\phi(t_2)+\phi_g)}|e\rangle \\ &\quad - e^{-i(\phi(t_2)+\phi_e+\phi(t_1))}|g\rangle] \\ &= \frac{1}{2}[(e^{-i\phi_g} - e^{-i(\phi_e+\phi(t_1)-\phi(t_2))})|g\rangle \\ &\quad - i(e^{-i(\phi_g+\phi(t_2))} + e^{-i(\phi_e+\phi(t_1))})|e\rangle] \end{aligned} \quad (37)$$

Utilizando la teoría cuántica y (37), es posible determinar la probabilidad de encontrar la partícula en el estado  $|e\rangle$ .

$$\begin{aligned} |\langle e|\psi\rangle|^2 &= \left| -\frac{1}{2}i(e^{-i(\phi_g+\phi(t_2))} + e^{-i(\phi_e+\phi(t_1))}) \right|^2 \\ &= \left| -\frac{1}{2}i(e^{-i(\phi_g+\phi(t_2))})(1 + e^{-i\Phi}) \right|^2 \\ &= \left| -\frac{1}{2}i(1 + e^{-i\Phi}) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos\Phi) \end{aligned} \quad (38)$$

Donde  $\Phi = \phi_e - \phi_g + \phi(t_1) - \phi(t_2)$  y hemos considerado lo anteriormente expuesto a finales de la sección 2.1 con respecto a la magnitud de energía y momento transferido al átomo, es decir  $\phi_g + \phi(t_2) \ll \phi_e$  para este caso, utilizando (32) y (33):

$$\begin{aligned} \Phi &= \phi_e - \phi_g + \phi(t_1) - \phi(t_2) \\ &= \delta T_R + \left( \frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{1}{2}mv_g^2 \right) T_R / \hbar \\ &= \delta T_R + \left( \frac{\vec{v}_e + \vec{v}_g}{2} \right) (\vec{v}_e - \vec{v}_g) m T_R / \hbar \end{aligned} \quad (39)$$

El punto clave es considerar que la fase  $\Phi$  depende de la suma y diferencia de las velocidades en las dos trayectorias; para el caso particular de las transiciones de Raman contrapropagadas la diferencia de velocidades se conoce y es igual a  $\hbar(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)/m$  en base al momento transferido a los átomos. Esta interesante cantidad es la velocidad principal de los átomos. el interferómetro implementado por dos pulsos  $\pi/2$  es sensible a la velocidad inicial de los átomos, los parámetros finales dependerán de la velocidad inicial de los átomos. Esto significa que se puede utilizar este tipo de interferómetro si la velocidad inicial es conocida. Un caso similar a este es el experimento realizado por Pritchard y colaboradores [11]. Ellos se basaron en una estadística de Bose-Einstein considerando un estado de reposo, ellos asumieron que  $\vec{v}_g = 0$  y pudieron escribir el cambio de fase como:  $\Psi = \delta T_R + 2\hbar k^2 T_R / m$  donde sustituyeron en (39)  $\vec{v}_g = 0$  y  $E = \frac{1}{2}mv_e^2 = p^2/2m$  para  $\vec{p} = 2\hbar\vec{k}$ . En este experimento ellos fueron capaces de medir la energía de retroceso y por consiguiente la influencia de índice refractivo en el momento de los átomos en retroceso. Por ejemplo si se parte de una distribución térmica de Maxwell-Boltzman donde la velocidad de distribución esta dada por  $e^{-mv^2/2kT}$ , la fase  $\Phi$  tiene distribución gaussiana con varianza  $\sigma_\Phi$ .

## II. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Haciendo un análisis final de la ecuación (39) podemos apreciar la dependencia del término  $\hbar/m$  que al utilizar la probabilidad de encontrar la partícula en el estado  $|e\rangle$  como  $|\langle e|\psi\rangle|^2 = 1$  hacemos  $\Phi = 0$ , los parámetros de velocidad son determinados por la relación que existe con el número de Oscilaciones de Bloch [13][3] técnica utilizada para medir la frecuencia de retroceso de los átomos sometidos a pulsaciones  $\pi/2$ .

Para la constante de estructura fina la mecánica cuántica siempre ha ligado la masa  $m$  de una partícula con la constante de Planck a través de la razón  $h/m$ . La masa aparece en las ecuaciones de movimiento básicas de la mecánica cuántica reflejada en esta razón (En la ecuación de Schrödinger así como en las ecuaciones relativistas de Dirac y Klein-Gordon). Para comparar la teoría cuántica con los experimentos, solo las mediciones de esta razón son suficientes. El ejemplo mas relevante de esto es la razón básica  $h/m_e$  ( $m_e$ : masa del electrón). Esta razón fundamental se encuentra en el camino a determinar la constante de estructura fina utilizando la constante de Raydberg  $R_\infty$ . De la teoría expuesta por Bohr sobre la estructura atómica [14] y experimentos realizados a inicios del siglo XX con el átomo de hidrógeno [14] se logró el descubrimiento de la constante de Raydberg para la masa nuclear finita.

$$R_{M_x} = \frac{m_e M_x}{m_e + M_x} \left( \frac{e^4}{4\pi c \hbar^3} \right) \quad (40)$$

Donde las constantes físicas son identificables al igual que en la ecuación  $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c$  donde  $m_e$ : masa atómica del electrón y  $M_x$ : masa atómica nuclear del elemento  $x$ . Utilizando esta ecuación, algunas sustituciones y un poco de algebra podemos obtener una expresión en función de la razón  $h/M_x$ , utilizando unidades gaussianas tenemos:

$$\begin{aligned} R_{M_x} &= \frac{m_e M_x}{m_e + M_x} \left( \frac{e^4}{c^2 \hbar^2} \right) \left( \frac{c}{4\pi \hbar} \right) \\ &= \frac{m_e M_x}{m_e + M_x} \alpha^2 \left( \frac{c}{2\pi \hbar} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

Considerando al átomo de Rubidio con peso atómico  $85.468 M_{Rb} \gg m_e$  por lo que  $R_{M_x} \simeq R_\infty$ .

$$\begin{aligned} R_\infty &= \alpha^2 \left( \frac{m_e}{m_e/(M_x \rightarrow \infty) + 1} \right) \left( \frac{c}{2\hbar} \right) \\ &= \alpha^2 m_e \frac{c}{2\hbar} = \alpha^2 \left( \frac{m_e}{M_x} \right) \left( \frac{c M_x}{2\hbar} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

Despejando para  $\alpha^2$ :

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{2R_\infty}{c} \left( \frac{m_e}{M_{Rb}} \right) \left( \frac{c M_{Rb}}{2\hbar} \right) \\ &= \frac{2R_\infty}{c} \left( \frac{A_r(Rb)}{A_r(e)} \right) \left( \frac{h}{M_{Rb}} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

Donde  $A_r(Rb)$  y  $A_r(e)$  son las masas reducidas del rubidio y el electrón respectivamente. la razón  $h/m$  para un sistema atómico puede ser deducida de la medición de la velocidad o energía de retroceso combinada con la medición exacta de la longitud de onda del foton. Las masas relativas  $A_r(e)$  y  $A_r(Rb)$  junto con la constante de Raydberg son conocidas con incertidumbres relativas de  $7 \times 10^{-12}$  para  $R_\infty$  [22][21],  $4.4 \times 10^{-10}$  para  $A_r(e)$  [4] y al menos  $2.0 \times 10^{-10}$  para el Rubidio  $A_r(Rb)$  [8]. (También se encuentra  $A_r(Cs)$ , masa atómica relativa para el nucleo de Cesio). El factor limitante para la precisión de  $\alpha$  es la razón  $h/M_x$  ya sea Cesio o Rubidio. La constante de estructura fina es una pieza clave para el ajuste de constantes físicas fundamentales [18][19]. Finalmente uno de los resultados obtenidos utilizando interferometría atómica fueron los de M. Cadoret, E. De Mirades y colaboradores, Paris francia, 2008 [10], utilizando una nube de átomos de  $^{87}\text{Rb}$  a  $3\mu\text{K}$  en una trampa magneto-óptica (MOT)

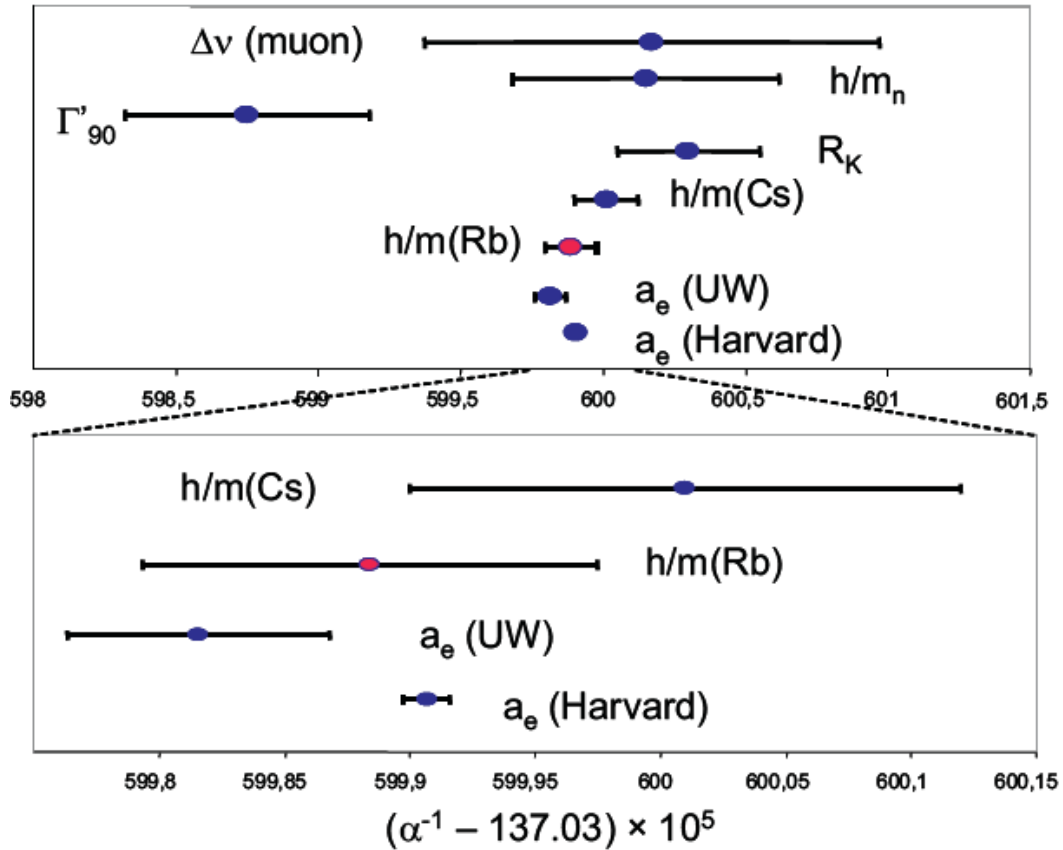
$$\frac{h}{m_{Rb}} = 4.59135929(6) \times 10^{-9} [1.3 \times 10^{-8}] \frac{m^2}{s} \quad (44)$$

$$\alpha^{-1} = 137.03599884(91) [6.7 \times 10^{-9}] \quad (45)$$

## I. Antecedentes Experimentales

Estudios previos en el campo de la experimentación relacionados con la física atómica dan crédito a la interferometría atómica por ser de alta precisión, estudios como los de A. Peters, K.Y. Chung y colaboradores en la Universidad de Stanford [20] muestran la utilización de interferómetros atómicos basados en pulsos ópticos de luz. Entre los interferómetros mas utilizados se encuentran: Interferómetros de Tres Rejillas, Interferómetros de estados con caminos enrejados como el Interferómetro óptico Ramsey-Bordé y el Interferómetro de Raman, Interferómetros Longitudinales como el Interferómetro Stern-Gerlach y los Interferómetros de Stückelberg, [13]. Entre las principales aplicaciones han sido la determinación de la constante de estructura fina utilizando esquemas de 4 pulsos o mas [12] y la medición de la aceleración de la gravedad [1].





**Figura 3:** Determinación de la constante de estructura fina en diferentes dominios de la física. Las mediciones más precisas son mostradas en la parte inferior. Son deducidas a partir de las razones  $h/m_{\text{Cs}}$  y  $h/m_{\text{Rb}}$ , el valor deducido de  $h/m_{\text{Rb}}$  corresponde al obtenido por [5].

### III. CONCLUSIÓN

Durante esta exposición se demostró la aplicación de los estados de un átomo sometido a radiación electromagnética y como los resultados de estos cambios generan fenómenos que permiten hacer mediciones como la frecuencia de retroceso de los átomos y cambios de fase obteniendo constantes tales como  $\hbar/m$  y  $\alpha$ ; se encontró que la teoría de perturbación dependiente del tiempo es fundamental para encontrar los estados posibles en los cuales se encontrará un átomo que es sometido a diferentes tipos de perturbaciones sinusoidales. Desde el punto de vista experimental el campo de la interferometría permite obtener estas perturbaciones como pulsos de luz configurables en la cantidad de pulsos  $\pi/2$  o  $\pi$  necesarios para obtener una ecuación de probabilidad de transición en función de variables medibles en cada estado por el que pasa el átomo.

### REFERENCIAS

- [1] Keng Yeow Chung & Steven Chu Achim Peters. Measurement of gravitational acceleration by dropping atoms. *NATURE*, pages 4510–4513, 1999.
- [2] Y.V. Baklanov, VP Chebotayev, and B.Y. Dubetsky. The resonance of two-photon absorption in separated optical fields. *Applied Physics A: Materials Science & Processing*, 11(2):201–202, 1976.
- [3] R. Battesti, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, B. Grémaud, F. Nez, L. Julien, and F. Biraben. Bloch oscillations of ultracold atoms: A tool for a metrological determination of  $h/m_{\text{Rb}}$ . *Physical review letters*, 92(25):253001, 2004.
- [4] T. Beier, H. Häffner, N. Hermanspahn, S.G. Karshenboim, H.J. Kluge, W. Quint,

- S. Stahl, J. Verdú, and G. Werth. New determination of the electron mass. *Physical review letters*, 88(1):11603, 2001.
- [5] P.R. Berman. *Atom interferometry*. Academic Pr, 1997.
- [6] C.J. Bordé. Atomic interferometry with internal state labelling. *Physics letters A*, 140(1-2):10–12, 1989.
- [7] C.J. Bordé, C. Salomon, S. Avrillier, A. Van Lerberghe, C. Bréant, D. Bassi, and G. Scoles. Optical ramsey fringes with traveling waves. *Physical Review A*, 30(4):1836, 1984.
- [8] M.P. Bradley, J.V. Porto, S. Rainville, J.K. Thompson, and D.E. Pritchard. Penning trap measurements of the masses of h. *Physical review letters*, (22):4510–4513.
- [9] M. Cadoret, E. De Mirandes, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, F. Nez, L. Julien, and F. Biraben. Precise determination of  $h/m$  rb using bloch oscillations and atomic interferometry: A mean to deduce the fine structure constant. *The European Physical Journal-Special Topics*, 163(1):101–111, 2008.
- [10] Malo Cadoret, Estefania De Mirandes, Pierre Clade, Francois Nez, Lucile Julien, Francois Biraben, and Saeda Guellati-Khilifa. Atom interferometry based on light pulses : application to the high precision measurement of the ratio  $h/m$  and the determination of the fine structure constant. *The European Physical Journal Special Topics 172 (2009) 121*, sep 2008.
- [11] G.K. Campbell, A.E. Leanhardt, J. Mun, M. Boyd, E.W. Streed, W. Ketterle, and D.E. Pritchard. Photon recoil momentum in dispersive media. *Physical review letters*, 94(17):170403, 2005.
- [12] P. Cladé, E. De Mirandes, M. Cadoret, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, F. Nez, L. Julien, and F. Biraben. Determination of the fine structure constant based on bloch oscillations of ultracold atoms in a vertical optical lattice. *Physical review letters*, 96(3):33001, 2006.
- [13] A.D. Cronin, J. Schmiedmayer, and D.E. Pritchard. Optics and interferometry with atoms and molecules. *Reviews of Modern Physics*, 81(3):1051, 2009.
- [14] Robert M. Eisberg. *Fundamentos de Física Moderna*. Number Cap. 5.
- [15] D. Friedrich, O. Burmeister, M. Britzger, A. Bunkowski, T. Clausnitzer, S. Fahr, E.B. Kley, A. Tünnermann, K. Danzmann, and R. Schnabel. Power-recycled michelson interferometer with a 50/50 grating beam splitter. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 122, page 012018. IOP Publishing, 2008.
- [16] David J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Number Cap. 9, Sec 9.1 in Second Edition.
- [17] M. Kasevich and S. Chu. Atomic interferometry using stimulated raman transitions. *Physical review letters*, 67(2):181–184, 1991.
- [18] P.J. Mohr and B.N. Taylor. Codata recommended values of the fundamental physical constants. *Rev. Mod. Phys*, 77:1–107, 2005.
- [19] P.J. Mohr, B.N. Taylor, and D.B. Newell. Codata recommended values of the fundamental physical constants. *REVIEWS OF MODERN PHYSICS Rev Mod Phys*, 80(2):633, 2008.
- [20] A. Peters, K.Y. Chung, B. Young, J. Hensley, and S. Chu. Precision atom interferometry. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 355(1733):2223, 1997.
- [21] C. Schwob, L. Jozefowski, B. De Beauvoir, L. Hilico, F. Nez, L. Julien, F. Biraben, O. Acef, J.J. Zondy, and A. Clairon. Optical frequency measurement of the 2s-12d transitions in hydrogen and deuterium: Rydberg constant and lamb shift determinations. *Physical review letters*, 82(25):4960–4963, 1999.
- [22] T. Udem, A. Huber, B. Gross, J. Reichert, M. Prevedelli, M. Weitz, and T.W.

- Hänsch. Phase-coherent measurement of the hydrogen 1s-2s transition frequency with an optical frequency interval divider chain. *Physical review letters*, 79(14):2646–2649, 1997.
- [23] D.S. Weiss, B.C. Young, and S. Chu. Precision measurement of  $h/m$   $cs$  based on photon recoil using laser-cooled atoms and atomic interferometry. *Applied Physics B: Lasers and Optics*, 59(3):217–256, 1994.
- [24] M. Weitz, T. Heupel, and TW Hänsch. Multiple beam atomic interferometer. *Physical review letters*, 77(12):2356–2359, 1996.
- [25] A. Wicht, J.M. Hensley, E. Sarajlic, and S. Chu. A preliminary measurement of the fine structure constant based on atom interferometry. *Physica scripta*, 2002:82, 2002.
- [26] Wikipedia. Efecto-zeeman.