

Una alternativa empírica para la estratificación de la temperatura en la atmósfera solar

RAQUEL NOHEMY MEJÍA ESPINOZA¹ Y MARLON JAVIER INTERIANO URQUÍA²

¹*Escuela de Física - Universidad Nacional Autónoma de Honduras, mail: raquel.espinoza@unah.hn*

²*Escuela de Física - Universidad Nacional Autónoma de Honduras, mail: marlon.interiano@unah.edu.hn*

Recibido: 10 de Octubre de 2017 / Aceptado: 8 de Diciembre de 2017

Resumen

A bibliographic revision about stellar atmospheres is presented, from basic concepts like radiation field, to approximate solutions of the equation of radiative transfer. Lastly, an empirical determination of the thermal stratification in the atmosphere of the sun, and a rough adjustment of this distribution for sun-like stars is presented.

Keywords: radiation, absorption, emission, opacity

Se presenta una revisión bibliográfica sobre atmósferas estelares, desde los conceptos básicos de campo de radiación hasta las soluciones aproximadas a la ecuación de transferencia radiativa. Finalmente se presenta una determinación empírica de la estratificación de la temperatura en la atmósfera solar y un ajuste aproximado de esta distribución para estrellas tipo solar.

Palabras clave: radiación, absorción, emisión, opacidad

PACS:97.10.Ex

I. INTRODUCCIÓN

LAS estrellas están formadas por dos partes: una a la cual se denomina el interior estelar y otra su atmósfera. Tanto en el interior como en la atmósfera estelar rigen los mismos principios físicos, la distinción entre las dos regiones radica que en la atmósfera estelar el estudio se limita a las capas más externas de la estrella, de la cual se recibe radiación que contribuye directamente al espectro estelar observado.

Para realmente comprender todos los fenómenos físicos que dan lugar a la formación del espectro, es necesaria la teoría de atmósferas estelares, que conduce a las ecuaciones que describen la dinámica de la estructura estelar.

El presente trabajo se dedica al estudio de los mecanismos de transferencia de energía en una estrella, a partir de los cuales, se puede explicar la formación del continuo en el espectro estelar. También se revisa algunas soluciones aproximadas a la ecuación de transferencia radiativa y se estima la variación de algunas cantidades medibles como la temperatura en la atmósfera de una estrella.

II. CAMPO DE RADIACIÓN

El principal objetivo de la teoría de atmósferas estelares es estudiar el conjunto de radiaciones electromagnéticas que se emiten desde una estrella. Se sabe que en las capas

superficiales de las estrellas más tempranas que las tipo F5 predomina la radiación como mecanismo de transferencia energético. En los objetos más tardíos el transporte de energía por convección tiene un aporte más significativo. Esta sección se enfoca en definir los conceptos básicos de la radiación, siendo este el principal mecanismo de transporte de energía en algunas estrellas de particular interés que se conocen como «estrellas tipo solar».[4]

Para describir el transporte de energía radiativa, se define la intensidad específica de radiación, la cual proporciona información sobre la distribución espacial y espectral del campo de radiación.

Si se considera la cantidad de energía electromagnética con una frecuencia entre ν y $\nu + \Delta\nu$ que pasa a través de un diferencial de área dA , de la superficie de un medio radiado, en un tiempo dt , que se propaga dentro de un ángulo sólido $d\Omega$; resulta que esta cantidad de energía es proporcional al área proyectada en la dirección de propagación, al ángulo sólido $d\Omega$, al tiempo dt y al intervalo de frecuencias $d\nu$.

$$E_\nu d\nu = I_\nu dA \cos(\theta) d\Omega dt d\nu \quad (1)$$

Esta constante de proporcionalidad es la que se conoce como la intensidad específica de radiación, I_ν . En el caso más general I_ν depende de la posición del campo radiante, la dirección considerada, la frecuencia ν y el

tiempo t . Las unidades (cgs) de la intensidad específica son ($\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{Sr}^{-1}$).

A partir de la intensidad específica de radiación se definen algunas cantidades físicas asociadas a los momentos geométricos del campo de radiaciones.[2]

La intensidad media de radiación es la integración de la intensidad específica sobre todas las direcciones y dividido entre $4\pi \text{Sr}^{-1}$, el ángulo sólido encerrado en una esfera. Sus unidades son ($\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$).

$$\langle I_\nu \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\nu \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (2)$$

Para un campo de radiación isotrópico, $\langle I_\nu \rangle = I_\nu$.

La densidad de energía específica es definida como la energía con frecuencia entre ν y $\nu + \Delta\nu$ por unidad de volumen. Sus unidades son ($\text{erg cm}^{-3} \text{Hz}^{-1}$).

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\nu \sin(\theta) d\theta d\phi = \frac{4\pi}{c} \langle I_\nu \rangle \quad (3)$$

El flujo de radiación específica se define como la cantidad de energía neta con una frecuencia entre ν y $\nu + \Delta\nu$ que pasa a cada segundo a través de un área unitaria proyectada en la dirección de propagación. Esta cantidad frecuentemente se mide de manera observacional. Sus unidades son ($\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$).

$$F_\nu = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\nu d\nu \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (4)$$

La presión de radiación se define como la fuerza generada por los fotones por unidad de área dA dentro de un ángulo sólido $d\Omega$. Sus unidades son ($\text{erg cm}^{-3} \text{Hz}^{-1}$).

$$P_{rad,\nu} = \frac{2}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_\nu d\nu \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (5)$$

La intensidad de radiación y sus momentos caracterizan los constituyentes espectrales de un haz de radiación; sus cantidades totales pueden obtenerse si se integra sobre todas las frecuencias².

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu, \quad u = \int_0^\infty u_\nu d\nu, \quad F = \int_0^\infty F_\nu d\nu \dots$$

III. RADIACIÓN DE CUERPO NEGRO

Para comprender las interacciones de la materia y la energía existentes en una atmósfera estelar es necesario hacer ciertas simplificaciones y hablar sobre equilibrio termodinámico, condición en la cual cada proceso es balanceado exactamente por el proceso inverso. Bajo esta

¹1 Sr = 1 Esterorradián, unidad derivada del sistema cgs para medir ángulo sólido

²El formalismo de transferencia radiativa se expresa en términos de frecuencia, ν , como de longitud de onda, λ , que se relacionan por $I_\lambda = -(c/\lambda^2) I_\nu$

condición se cumplen ciertas leyes físicas que son útiles para describir el estado de la materia en las atmósferas estelares.

Se sabe que un cuerpo a una temperatura determinada emite radiación. Por lo tanto, se denota la potencia de emisión en una dirección \hat{k} como $P_e(\hat{k})$, la potencia de absorción de radiación en dirección opuesta como $P_a(-\hat{k})$ y κ_ν como el coeficiente de absorción que indica la fracción de radiación absorbida por un cuerpo.

Bajo condiciones de equilibrio termodinámico la potencia de emisión P_e y el coeficiente de absorción κ_ν son función de la temperatura T y la frecuencia ν . Si además existe equilibrio entre la radiación emitida y absorbida, se puede obtener la ley de KIRCHHOFF [2]

$$j_\nu(T) = \kappa_\nu(T) S_\nu(T) \Rightarrow \frac{j_\nu(T)}{\kappa_\nu(T)} = S_\nu(T) \quad (6)$$

Donde $j_\nu(T)$ es la potencia de emisión en función de la temperatura y $S_\nu(T)$ se conoce como la función fuente que describe la distribución a una frecuencia dada de la intensidad de radiación en equilibrio termodinámico. Esta ley se cumple para cualquier cuerpo bajo esta condición de equilibrio, independientemente de las propiedades, o de las radiaciones incidentes.

En 1894, MAX PLANCK se dio a la tarea de buscar la forma que debería tener la función fuente $S_\nu(T)$, para una situación particular, conocido como el problema del cuerpo negro, es decir, un absorbedor ideal donde ($\kappa_\nu = 1$).

$$j_\nu(T) = S_\nu(T)$$

En 1900, por experimentación con detectores infrarrojos (sensibles entre 12 y 18 μm), PLANCK presentó que la distribución espectral de la radiación que emite un absorbedor perfecto en equilibrio termodinámico a una temperatura T , esta descrita por la función de PLANCK.

$$S_\nu(T) = B_\nu(T) = \frac{2hc^{-3}\nu^5}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (7)$$

donde h es la constante de PLANCK y k es la constante de BOLTZMANN. Para conservar el flujo en toda la banda espectral se cumple

$$B_\nu d\nu = B_\lambda d\lambda$$

La radiación de cuerpo negro es isotrópica y no depende de la composición del cuerpo. Los momentos geométricos de la función de PLANCK se calculan directamente bajo esta consideración de isotropía, dando como resultados. [2]

La intensidad media de radiación

$$j_\nu = B_\nu(T) \Rightarrow J = \int_0^\infty j_\nu(T) d\nu$$

$$B(T) = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \quad (8)$$

La densidad de energía

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu(T)$$

$$u(T) = \frac{4\sigma}{c} T^4 \quad (9)$$

El flujo neto de energía bajo la condición de isotropía es nulo.

$$F_\nu = 0 \quad (10)$$

La presión de radiación, donde se tiene que para emisión isotrópica $p_\nu = u_\nu/3$.

$$P = \frac{4\sigma}{3c} T^4 \quad (11)$$

IV. TEMPERATURAS ASTROFÍSICAS Y EQUILIBRIO TERMODINÁMICO LOCAL

Determinar la temperatura de una estrella resulta algo complejo ya que estas no son un cuerpo negro. En astrofísica existen diferentes mediciones de temperatura, definidas de acuerdo al proceso físico que describen. En la tabla 1 se especifican estos tipos de temperatura.[3]

Tanto en las atmósferas estelares, como en el interior de las estrellas, no existen condiciones de equilibrio termodinámico: la temperatura varía con la localización y a su vez la distribución de la velocidad; y la energía de los fotones varía con la temperatura. Por eso resulta conveniente hablar sobre un equilibrio termodinámico local.

En este caso las distribuciones que describen al medio estelar corresponden localmente con las de equilibrio termodinámico, por lo que definimos la temperatura como un parámetro local $T(\vec{r})$. La función fuente es la función de PLANCK, evaluada localmente en término de coordenadas de posición o de profundidad óptica.

$$S_\nu = B_\nu(T(\vec{r})) \quad \text{ó} \quad S_\nu = B_\nu(T(\tau_\nu))$$

La profundidad óptica se interpreta como un espesor de la atmósfera estelar, donde existe una reducción de la luz o energía emitida desde el interior estelar debido a la interacción de los fotones con el medio estelar. Esta cantidad es adimensional y se define como.

$$\Delta\tau_\nu = \tau_{\nu,f} - \tau_{\nu,0} = \int_0^s \kappa_\nu \rho ds$$

Donde s es la distancia medida a lo largo del recorrido de un fotón en la dirección del movimiento, κ_ν es el coeficiente de absorción y ρ es la densidad del medio estelar.

Si $\tau_\nu \ll 1$ se dice que el medio es ópticamente delgado; mientras que si $\tau_\nu \gg 1$, el medio es ópticamente grueso.

V. OPACIDAD ESTELAR

Ahora se considera un haz de luz que viaja desde el interior de la estrella, una parte de la energía que posee este haz de luz se absorbe en su trayecto. Este cambio de intensidad dI_ν es proporcional a la intensidad I_ν , a la distancia viajada ds y a la densidad del medio estelar ρ .

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds$$

Donde κ_ν es el coeficiente de absorción u opacidad. Se define la opacidad como la sección transversal en la que se absorben fotones, con una frecuencia ν por unidad de masa estelar. En general la opacidad de un gas depende de su composición, densidad y temperatura.

Se definen dos tipos de opacidades: una asociada al espectro continuo que se determina por la contribución de varios procesos físicos; y otra que sólo tiene validez en la formación de líneas espectrales que se denota por $\kappa_{\nu,bb}$, este tipo de opacidad resulta del proceso de excitación de un átomo cuando un electrón cambia a un nivel mayor o menor de energía. Para determinar el valor de $\kappa_{\nu,bb}$, se requiere de un estudio más profundo de espectroscopia para explicar la formación de líneas de absorción en el espectro estelar.

Esta sección solo se enfoca en calcular la opacidad asociada al continuo con la mayor precisión posible, como ya se vio, no es posible definir la opacidad independiente de la frecuencia; por lo que más adelante se describe la relación de la opacidad con esta variable.[4]

La absorción continua, que se observa a una determinada frecuencia en un espectro estelar, resulta de la suma de las absorciones verdaderas y aparentes producidas en esa frecuencia por determinados procesos físicos. Los procesos físicos de absorción verdadera que contribuyen a la opacidad continua se dividen en dos categorías: el proceso de absorción ligado-libre y el proceso de absorción libre-libre.

El proceso de absorción ligado-libre ocurre cuando un fotón incidente tiene suficiente energía para ionizar un átomo, donde se obtiene un electrón libre que puede tener cualquier energía; se denota como $\kappa_{\nu,bf}$ la opacidad ligado-libre. El proceso de absorción libre-libre ocurre cuando un electrón libre que se encuentra cercano a un ión absorbe un fotón causando que la velocidad del electrón se incremente; se denota como $\kappa_{\nu,ff}$ la opacidad libre-libre.

Los procesos de absorción aparente incluyen la dispersión de la radiación producida por electrones libres (dispersión THOMPSON) o bien por sistemas ligados, tales como átomos o moléculas (dispersión RAYLEIGH). En las atmósferas estelares calientes, donde todo el gas está ionizado, la opacidad por la dispersión de electrones, que se denota por $\kappa_{\nu,es}$ domina la opacidad del continuo.

Tipos de Temperaturas	Descripción
Temperatura Efectiva	Se obtiene desde la Ley de STEFAN- BOLTZMANN, es una importante descripción global de una estrella, ya que a partir de la temperatura efectiva se determina su luminosidad.
Temperatura de Ionización	Se define en la Ecuación de SAHA, que describe el estado de ionización de los átomos.
Temperatura de Excitación	Se define en la Ecuación de BOLTZMANN, que describe el estado de excitación de los átomos.
Temperatura Cinética	Se define en la distribución de MAXWELL-BOLTZMANN, que describe la velocidad de la partículas en función de la temperatura.
Temperatura de color	Se define por la función de PLANCK, que describe la distribución con la frecuencia de la intensidad de radiación, como consecuencia de la temperatura del gas.

Tabla 1: *Tipos de temperaturas astrofísicas*

Otra fuente de opacidad muy importante se da en ciertas condiciones, cuando el átomo de hidrógeno captura un segundo electrón que se mantiene ligado al átomo. Cuando esto ocurre, el átomo de H queda ionizado negativamente, por lo que se denomina ión negativo del hidrógeno (H^-).

En 1939, RUPERT WILDT fue quien por vez primera sugirió que los iones negativos del H son los responsables de la mayor parte de la absorción continua observada en el sol. Cálculos muy precisos confirman que para liberar el segundo electrón del H^- se requiere una energía de 0.754 eV, precisamente porque esta energía de ligadura del segundo electrón ligado es muy baja, un pequeño cambio en las condiciones del gas es suficiente para que el H^- expulse el segundo electrón y se convierta nuevamente en un átomo de H neutro.

La opacidad total se obtiene de la suma del término de opacidad asociado a la formación de líneas espectrales y de todas las contribuciones a la opacidad asociadas al espectro continuo:

$$\kappa_{\nu} = \kappa_{\nu,bb} + \kappa_{\nu,bf} + \kappa_{\nu,ff} + \kappa_{\nu,es} + \kappa_{\nu,H^-}$$

Usualmente se utilizan algunas aproximaciones de la opacidad sobre todas las frecuencias, que dan como resultado una función que depende solo de la composición, densidad y temperatura. La aproximación más conocida es la opacidad media de ROSSELAND. [3]

$$\frac{1}{\kappa_R} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_{\nu}} \frac{\partial B_{\nu}(T)}{\partial T} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{\partial B_{\nu}(T)}{\partial T} d\nu} \quad (12)$$

Las fórmulas aproximadas para los procesos contribuyentes a la opacidad del continuo se escriben de acuerdo a la ley de opacidad de KRAMMER, debido a que tienen la forma $\bar{\kappa} = \kappa_0 \rho T^{-3.5}$, donde κ_0 es aproximadamente constante para una composición dada. Las aproximaciones para la opacidad ligado-libre y la opacidad libre-libre se escriben como sigue:

$$\bar{\kappa}_{bf} = 4.34 \times 10^{21} \frac{g_{bf}}{t} Z (1 + X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1} \quad (13)$$

$$\bar{\kappa}_{ff} = 3.68 \times 10^{18} g_{ff} (1 - Z) (1 + X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1} \quad (14)$$

donde ρ es la densidad, X y Z son las fracciones masa de hidrógeno y metales ³, respectivamente.

Los factores de GAUNT, g_{bf} y g_{ff} , son correcciones de la mecánica cuántica y son aproximadamente 1 para longitudes de onda en el visible y ultravioleta. Una corrección adicional para la opacidad ligado-libre es el factor de guillotina t , típicamente los valores de t están entre 1 y 100.

La contribución a la opacidad del proceso de dispersión de electrones, es independiente de la frecuencia y se calcula de forma simple

$$\bar{\kappa}_{es} = 0.02 (1 + X) \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1} \quad (15)$$

Una estimación de la contribución del H^- a la opacidad media, en rangos de temperatura de 3000 K a 6000 K y densidades entre $10^{-7} \text{ kg m}^{-3}$ y $10^{-2} \text{ kg m}^{-3}$. Y valores de $X \cong 0.7$ y Z entre 0.001 y 0.03 ⁴ está dada por

$$\bar{\kappa}_{H^-} = 7.9 \times 10^{-34} (Z/0.02) \rho^{1/2} T^9 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1} \quad (16)$$

La opacidad media de Rosseland total se calcula como sigue

$$\kappa_R = \frac{1}{\bar{\kappa}_{bb} + \bar{\kappa}_{bf} + \bar{\kappa}_{ff} + \bar{\kappa}_{es} + \bar{\kappa}_{H^-}} \quad (17)$$

VI. ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA

Si ahora se consideran los procesos de emisión y absorción conjuntamente, se obtiene la ecuación de transferencia radiativa.[5]

$$\frac{dI_{\nu}}{ds} = -\kappa_{\nu} I_{\nu} + j_{\nu} \quad (18)$$

³En astronomía, se denomina metales a cualquier elemento diferente de hidrógeno y helio.

⁴Valores típicos de X y Z para estrellas de la secuencia principal

Si expresa la ecuación anterior en términos de la profundidad óptica, se obtiene.

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu \quad (19)$$

En caso de no absorción, $\kappa_\nu = 0$, la solución de la ecuación queda en términos lineales.

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu \quad (20)$$

En caso de no emisión, $j_\nu = 0$, la solución a la ecuación de transferencia queda como un decaimiento exponencial.

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) e^{-\tau_\nu} \quad (21)$$

La solución formal a la ecuación de transferencia radiativa si se toma en conjunto ambos procesos es:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tau'_\nu) e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} d\tau'_\nu \quad (22)$$

Para $\tau_\nu \ll 1$ se tiene que $I_\nu(\tau_\nu) \rightarrow I_\nu(0)$; mientras que si $\tau_\nu \gg 1$ se tiene que $I_\nu(\tau_\nu) \rightarrow S_\nu$. I_ν pierde su comportamiento inicial en escalas de orden $\tau_\nu \sim 1$, y esta tiende a adquirir las características del medio, descritas por la función fuente.

VII. SOLUCIONES APROXIMADAS A LA ECUACIÓN DE TRANSFERENCIA RADIATIVA

A. Atmosferas plano-paralelas y aproximación atmósfera gris

La atmósfera de las estrellas de la secuencia principal son físicamente delgadas comparadas con el tamaño de las estrellas, por lo que se pueden considerar como una atmósfera plano-paralela, es decir que se encuentran estructuradas a lo largo de una sola dirección, que por conveniencia se elige \hat{z} . [3]

En este caso la ecuación de transferencia radiativa en términos de la profundidad óptica en la dirección \hat{z} se expresa como

$$\cos(\theta) \frac{dI_\nu}{d\tau_{\nu,z}} = I_\nu - S_\nu \quad (23)$$

siendo θ el ángulo de la línea de visión con la normal al plano del medio.

Para la aproximación atmósfera gris se supone que el coeficiente de absorción κ_ν es independiente de la frecuencia, por lo que la ecuación de transferencia radiativa, se expresa como:

$$\cos(\theta) \frac{dI}{d\tau_z} = I - S$$

Si se integra sobre todo el ángulo sólido, se obtiene

$$\frac{dF_{rad}}{d\tau_z} = 4\pi(\langle I \rangle - S)$$

Donde F_{rad} es constante ($dF_{rad}/d\tau_z = 0$), se obtiene

$$\langle I \rangle = S \quad (24)$$

Si ahora se multiplica la ecuación 23 por $\cos(\theta)$ y se integra sobre todo el ángulo sólido, se obtiene

$$P_{rad} = \frac{1}{c} F_{rad} \tau_z + C \quad (25)$$

Estas son las condiciones con las que se logra definir la distribución de la intensidad específica de radiación bajo la suposición de atmósfera plano-paralela gris.

B. Primera aproximación de Eddington

Si se considera una atmósfera gris, estática, estratificada en capas plano-paralelas donde se tiene condiciones de equilibrio radiativo y equilibrio termodinámico.

La hipótesis básica es que en la dirección \hat{z} , a la intensidad de radiación se le asigna un valor I_1 a cierta profundidad τ_z e I_2 a la orilla de la atmósfera donde $\tau_z = 0$.

Los momentos geométricos del campo de radiación se expresan como

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2}(I_1(\tau_z) + I_2(0)) \quad (26)$$

$$F_{rad} = \pi(I_1(\tau_z) - I_2(0)) \quad (27)$$

$$P_{rad} = \frac{2\pi}{3c}(I_1(\tau_z) + I_2(0)) = \frac{4\pi}{3c}\langle I \rangle \quad (28)$$

A partir de estas relaciones y la condición de flujo neto radiativo constante se obtiene la función fuente $S(T)$ y la distribución de temperatura en función de la profundidad óptica. Con la condición de equilibrio termodinámico, donde $S(T) = B(T)$, se obtiene

$$S(T) = \frac{3F_{rad}}{4\pi} \left(\tau_z + \frac{2}{3} \right) \quad (29)$$

$$T^4(\tau_z) = \frac{3}{4} T_e^4 \left(\tau_z + \frac{2}{3} \right) \quad (30)$$

Este resultado es importante ya que en primera instancia $T = T_e$ cuando $\tau_z = 2/3$ y no en $\tau_z = 0$, lo que significa que el origen de los fotones se observan en realidad provienen de una profundidad óptica igual a $2/3$.

Otro fenómeno característico que se observa en las atmósferas estelares se conoce como ley de oscurecimiento al limbo, que consiste en una disminución gradual del brillo observado de una estrella desde su centro hasta su borde.

Este fenómeno se debe al aumento de temperatura en la atmósfera estelar con la profundidad óptica. Cuando se observa su centro, se miran las capas más profundas y calientes, las cuales emiten la mayor parte de la luz. En

el limbo, solo las capas más altas de la atmósfera, que son más frías y producen menos luz, son visibles. Estas observaciones se usan para determinar la distribución de la temperatura y la función fuente en términos de la profundidad óptica.

Para obtener la intensidad emergente en términos de la función fuente se multiplica a ambos lados de la ecuación 19 por $e^{-\tau_\nu}$, donde se obtiene

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} e^{-\tau_\nu} - I_\nu e^{-\tau_\nu} = -S_\nu e^{-\tau_\nu}$$

Ahora si se reordena la ecuación anterior y se integra a ambos lados, se obtiene

$$I_\nu(0) = I_{\nu,0} e^{-\tau_{\nu,0}} - \int_{\tau_{\nu,0}}^0 S_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu \quad (31)$$

Para el caso de una atmósfera plano-paralela, se expresa $I_\nu(0)$ en función de θ , cuando se reemplaza $\tau_{\nu,0}$ por $\tau_{\nu,0} \sec(\theta)$ (profundidad óptica vertical) que resulta en

$$I(0) = \int_0^\infty S_\nu \sec(\theta) e^{-\tau_\nu \sec(\theta)} d(\tau_\nu \sec(\theta)) \quad (32)$$

La forma de la función fuente es desconocida, pero resulta una buena suposición que tenga la forma $S_\nu = a + b \tau_\nu$, donde a y b son números que dependen de la frecuencia.

La intensidad emergente en términos de la función fuente es entonces

$$I_\nu(0, \theta) = a_\nu + b_\nu \cos(\theta) \quad (33)$$

De la ecuación 29 y bajo condición de equilibrio termodinámico local

$$a = \frac{\sigma}{2\pi} T_e^4 \quad y \quad b = \frac{3\sigma}{4\pi} T_e^4$$

Con lo que se obtiene la ley de oscurecimiento al limbo, es decir, la razón de intensidad emergente

$$\frac{I(0, \theta)}{I(0, 0)} = \frac{3}{5} \left(\cos(\theta) + \frac{2}{3} \right) \quad (34)$$

C. Segunda aproximación de Eddington

En esta aproximación se recalcula el valor de la función fuente $S(T)$ en la frontera superior donde ($\tau_z = 0$), a partir de la ley de oscurecimiento hacia el limbo obtenida en la primera aproximación.

$$S(0) = J(0) = \frac{1}{4\pi} \int I(0, \theta) d\Omega$$

$$J(0) = \frac{7F_{rad}}{16\pi}$$

Bajo condición de equilibrio termodinámico local y flujo neto radiativo constante, entonces en $\tau_z = 0$ la función fuente $S(0) = B[T(0)]$.

$$T_e = \left(\frac{16}{7} \right)^{1/4} T_e \cong 1.230 T(0)$$

D. Solución de Simonneau

En 1931, E. SIMONNEAU presentó un tratamiento para estimar el espectro emergente de una atmósfera estelar, dado el coeficiente de absorción κ_λ en función de la longitud de onda⁵. Para $\tau_\lambda \gg 1$, la ecuación de transferencia se escribe como[2]

$$\cos(\theta) \frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} = I_\lambda - B_\lambda(T(\tau_\lambda)) \quad (35)$$

donde se puede aproximar

$$I_\lambda = B_\lambda + \cos(\theta) \frac{dB_\lambda}{d\tau_\lambda}$$

Se propone entonces para la intensidad en la superficie.

$$I_\lambda(0, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{para } \theta < \pi/2 \\ B_\lambda(0) + \cos(\theta) \left(\frac{dB_\lambda}{d\tau_\lambda} \right)_0 & \text{para } \theta \geq \pi/2 \end{cases}$$

Se calcula el flujo en la superficie

$$F_\lambda(0) = 2\pi \int_0^\pi I_\lambda \cos(\theta) d\theta$$

$$F_\lambda(0) = \pi B_\lambda(0) + \frac{2\pi}{3} \frac{dB_\lambda}{d\tau_\lambda}(0)$$

En un atmósfera plano-paralela el flujo neto de energía es constante, es decir, independiente de \hat{z} . Si se integra sobre todas las longitudes de onda λ ; y se toma en cuenta las definiciones de opacidad media de ROSSELAND (ecuación 12) y de PLANCK definida por

$$\kappa_p = \frac{1}{B(T)} \int_0^\infty \kappa_\lambda B_\lambda d\lambda \quad (36)$$

Se emplea la relación entre el flujo y la temperatura efectiva, $F = \sigma T_e^4$; y bajo condición de equilibrio termodinámico local en la temperatura de superficie, $B(T_0) = (\sigma/\pi) T(0)^4$; se obtiene la temperatura física en la superficie, $T_0 = T(0)$ en función de la temperatura efectiva siempre y cuando podamos determinar $\kappa_p(\rho, T)$ y $\kappa_R(\rho, T)$.

$$F = \pi B(0) + \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\kappa_p}{\kappa_R} \right) B(0)$$

$$T(0)^4 = \frac{T_e^4}{1 + 4\kappa_p/3\kappa_R} \quad (37)$$

Para una atmósfera gris, $\kappa_\lambda = cte$ por lo que $\kappa_p = \kappa_R$ de donde, se obtiene

$$T_0 = (3/7)^{1/4} T_e \simeq 0.8091 T_e$$

A continuación se presenta un cuadro resumen de las diferentes aproximaciones de la relación entre la temperatura efectiva y la temperatura superficial de una estrella.

⁵Recordar que la relación entre la longitud de onda y la frecuencia esta dado por $\lambda\nu = c$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

Aproximaciones	$T_0(T_e)$
Solución exacta	$T_0 = 0.8112T_e$
1 ^{era} Aprox. Eddington	$T_0 = 0.8409T_e$
2 ^{da} Aprox. Eddington	$T_0 = 0.8130T_e$
Aprox. Simonneau	$T_0 = 0.8091T_e$

Tabla 2: Relación entre temperatura efectiva y temperatura superficial con diferentes aproximaciones

VIII. DETERMINACIÓN EMPÍRICA DE LA TEMPERATURA EN LA ATMÓSFERA SOLAR

Hasta ahora se revisarán todos los conceptos importantes que engloba la teoría de atmósferas estelares, en esta sección se presenta la determinación empírica de la estratificación de la temperatura en la atmósfera solar.

Si se expresa la ecuación 32 en términos de longitud de onda y se asume la forma lineal de la función fuente.[1]

$$I_\lambda(0, \theta) = \int_0^\infty a_\lambda e^{-\tau_\lambda \sec(\theta)} d(\tau_\lambda \sec(\theta)) + \dots$$

$$\dots + \int_0^\infty b_\lambda e^{-\tau_\lambda \sec(\theta)} d(\tau_\lambda \sec(\theta))$$

$$I_\lambda(0, \theta) = A_i + B_i \cos(\theta) = a_\lambda + b_\lambda \cos(\theta)$$

En el caso más general, cuando

$$S_\lambda(\tau_\lambda) = \sum_i a_{\lambda i} \tau_\lambda^i$$

Se encuentra

$$I_\lambda(0, \theta) = \sum_i A_{\lambda i} \cos^i(\theta) \quad \text{con} \quad A_{\lambda i} = a_{\lambda i} i!$$

Si se mide la variación de la intensidad desde el centro al limbo solar $I_\lambda(0, \theta)$, se puede determinar la relación entre la profundidad óptica y la función fuente para todas las longitudes de onda.

En la tabla 3 se muestran mediciones de la intensidad solar a diferentes longitudes de onda, expresadas en $[\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ cm}^{-1}]$.

$$I_\lambda(0, \theta) = [a_0(\lambda) + a_1(\lambda) \cos\theta + 2a_2(\lambda) \cos^2\theta] I_\lambda(0, 0)$$

$$S_\lambda(\tau_\lambda) = [a_0(\lambda) + a_1(\lambda)\tau_\lambda + a_2(\lambda)\tau_\lambda^2] I_\lambda(0, 0)$$

Por ejemplo a 5010Å, longitud de onda de mayor emisión solar. La ley de oscurecimiento al limbo se expresa como

$$\frac{I_\lambda(0, \theta)}{I_\lambda(0, 0)} = [0.2593 + 0.8724 \cos\theta - 0.1336 \cos^2\theta]$$

En la figura 1, se observa la dependencia de la función fuente en términos de la profundidad óptica para distintas longitudes de onda. A medida aumenta la profundidad

$\lambda[\text{Å}]$	a_0	a_1	$2a_2$	$I_\lambda(0, 0) \times 10^{13}$
3737	0.1435	0.9481	-0.0920	42.0
4260	0.1754	0.9740	-0.1525	44.9
5010	0.2593	0.8724	-0.1336	40.3
6990	0.4128	0.7525	-0.1761	25.0
8660	0.5141	0.6497	-0.1657	15.5
12250	0.5969	0.5667	-0.1646	7.7
16550	0.6894	0.4563	-0.1472	3.6
20910	0.7249	0.4100	-0.1360	1.6

Tabla 3: Variación de la intensidad solar a diferentes longitudes de onda

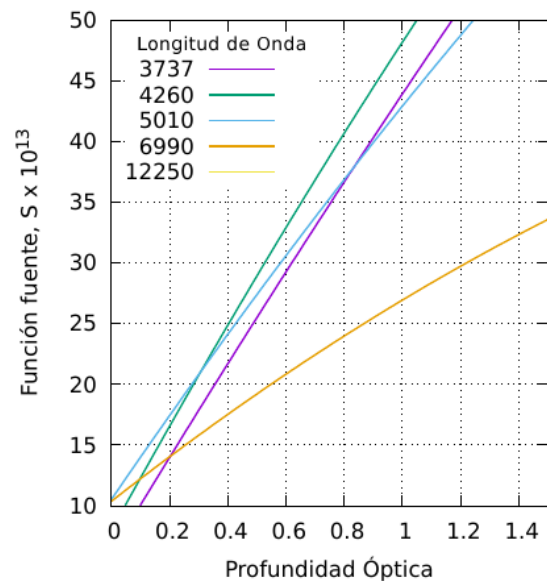


Figura 1: Función fuente vrs profundidad óptica a diferentes longitudes de onda para el sol

aumenta el valor de la función fuente. Lo que indica que la relación emisión-absorción en el medio estelar aumenta.

Ahora bien, para cada longitud de onda se puede encontrar la relación de la temperatura con la profundidad óptica, si se asume condiciones de equilibrio termodinámico tal que

$$S_\lambda = B_\lambda(T(\tau_\lambda)) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

Si se iguala la expresión anterior a la aproximación que se derivó a partir de la variación de intensidad del centro al limbo solar, se obtiene una correlación para la temperatura en términos de la profundidad óptica a una cierta longitud de onda dada. Estos resultados se muestran en la figura 2.

En el sol, se puede definir una profundidad geométrica que se denota por t , en la que se sabe que a cierta profundidad, cada capa tiene una temperatura superficial constante. Por lo que se puede encontrar la variación de la profundidad

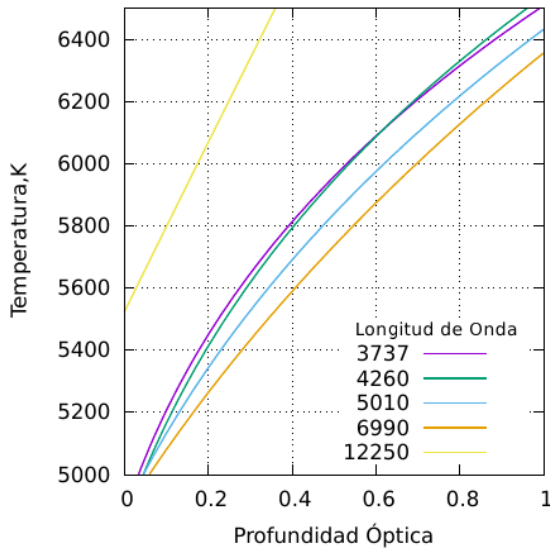


Figura 2: Distribución de la Temperatura con la profundidad a diferentes longitudes de onda para el sol

óptica con la longitud de onda a una temperatura dada. Donde la profundidad geométrica y la profundidad óptica se relacionan por medio de κ_λ .

$$\tau_\lambda = \kappa_\lambda t$$

De la figura 2 se puede estimar valores de profundidad óptica a una temperatura determinada, si se traza una línea horizontal. Por ejemplo para $T = 6200$ K se estiman valores de profundidad óptica a diferentes longitudes de onda que se resumen en la tabla 4.

λ [Å]	τ_λ
3737	0.7112
4260	0.7222
5010	0.7889
6990	0.8555
12250	0.2555

Tabla 4: Estimaciones de profundidad óptica a partir de la figura 2

Lo cual proporciona una idea de como es la variación del coeficiente de absorción κ_λ con la longitud de onda a partir de su relación con la profundidad geométrica t .

Ahora se utilizará un procedimiento similar para obtener la distribución de temperatura en términos de la profundidad óptica para otras estrellas. Se sabe que no existen observaciones en gran escala del oscurecimiento al limbo en otras estrellas.

Entonces un procedimiento aproximado para estrellas del tipo solar, es tratar de ajustar la distribución de temperatura solar que se ha descrito a la nueva estrella, a través de una manipulación algebraica. La distribución de temperatura encontrada para el caso gris en la solución aproximada de EDDINGTON expresada para el sol.

$$T_{sol}^4(\tau_z) = \frac{3}{4} T_{e,sol}^4 \left(\tau_z + \frac{2}{3} \right) \quad (38)$$

Si ahora se divide término a término la ecuación 30 y 38, se obtiene

$$T^4(\tau_z) = \frac{T_e^4}{T_{e,sol}^4} T_{sol}^4(\tau_z) \quad (39)$$

Según comparaciones que se han realizado con otros modelos teóricos para calcular la distribución de temperatura en otras estrellas, es posible utilizar la temperatura solar ajustada para estrellas de hasta dos veces la temperatura efectiva del Sol, es decir, unos 11,000 K aproximadamente.

IX. CONCLUSIÓN

Sin duda la teoría de atmósferas estelares da una descripción completa de los procesos físicos y del estado de la materia en esta región. Actualmente existen muchos modelos de atmósferas estelares cada vez más complejos que incluyen hasta los efectos de la opacidad debido a las líneas del espectro estelar, con la ayuda de computadoras más avanzadas. Es evidente que se está cada vez más cerca de modelar físicamente todos los procesos en las atmósferas estelares con una mayor precisión.

REFERENCIAS

- [1] BÖHM-VITENSE, E.,(2003) *Introduction to stellar astrophysics:Stellar atmospheres*, Cambridge:University Press, ISBN 0521344034.
- [2] CARRAMIÑANA A., *Transferencia Radiativa*, recuperado de: <http://www.inaoep.mx/~alberto/cursos/>, Tegucigalpa, 2017.
- [3] CARROLL, W., OSTLIE, A.,(2007) *An Introduction to modern astrophysics*, Pearson:Addison Wesley, ISBN 0321442849.
- [4] LEVATO H., *Curso de atmósferas estelares*, recuperado de: <http://astro.if.ufrgs.br/levato/>, Tegucigalpa, 2017.
- [5] RYBICKI, G.,LIGHTMAN, A.,(1979) *Radiative Processes in Astrophysics*, John Wiley, ISBN 04711048151
- [6] RUTTEN R.J.,(2000) *Radiative Transfer in stellar atmospheres*, Sterrekunding Instituut Utrecht.