Electromagnetismo en varias dimensiones.

Angel Velásquez [1] and Jhony A. Herrera[2]

[1] Universidad Nacional Autónoma de Honduras, mail: angel.velasquez@unah.hn
[2] Universidad Nacional Autónoma de Honduras, mail: jhony.herrera@unah.hn

Recibido: 23 de Marzo de 2015 / Aceptado: 4 de Mayo de 2015

Resumen

In this article expressions for the charge density, the electric field , the scalar potential and the density of electric current are obtained in more dimensions using the formalism of string theory, which has been widely accepted by scientists in recent years.

Keywords: string theory, charge density, electric field, scalar potential, electric current density .

En este artículo se obtendán expresiones para la densidad de carga, el campo eléctrico, el potencial escalar y la densidad de corriente eléctrica en más dimensiones, utilizando el formalismo de teoría de cuerdas, el cual ha tenido mucha aceptación por los cientificos en los últimos años.

Palabras clave: teoría de cuerdas, densidad de carga, campo eléctrico, potencial escalar, densidad de corriente eléctrica.

I. Introducción

El estudio formal de la física en dimensiones extra comenzó a tomar forma durante el primer cuarto del siglo XX, con los trabajos de Nordström y Theodor Kaluza (ver [6], [8]). Éstos, en un intento de unificar la interacción gravitacional y la interacción electromagnética, introdujeron una quinta dimensión al espacio-tiempo, la cual estaba compactada en un círculo cuyo radio fue estimado posteriormente por Oscar Klein [7], que resultó ser del orden de la escala de Planck($L_p \sim 10^{-33} cm$). El resultado de Klein dio respuesta al problema de no poder observar la 5^{ta} dimensión, la cual, al estar compactada en un radio tan pequeño, necesitaba una gran cantidad de enegía para poder ser observada.

Más tarde, Einstein, Jordan y Bergmann realizaron varias modificaciones a esta teoría (ver [1],[5]), la cual, debido al surgimiento de la teoría cuántica, perdería inevitablemente su popularidad. Posteriormente, luego de 60 años, estas ideas fueron retomadas con el fin de crear una teoría de campo unificada, donde intervendrían las cuatro interacciones de la naturaleza. Esta es la que ahora conocemos como la teoría de cuerdas, la cual viene a tratar de resolver ciertos problemas que aparecen en el modelo estándar (una mejor discusión aparece en [11]).

La estructura de este artículo será de la siguiente manera: En la sección II se desarrolla una breve descripción de lo que es el estudio de volúmenes en dimensiones extra. Además, en la sección III, IV, V y VI utilizamos este desarrollo para estudiar las implicaciones que tiene introducir dimensiones extra [1] al estudio del electromagnetismo, considerando problemas con simetría esférica. Finalmente en la sección IV damos una breve discusión de los resultados.

II. Esferas en d dimensiones

El desarrollo de teorías de campos en varias dimensiones trae consigo la necesidad de ser precisos al momento de hablar sobre esferas y sus volúmenes (ver [11]). En el lenguaje informal tendemos a confundir lo que son esferas con bolas, lo cual desde el punto de vista matemático es algo totalmente diferente. Cuando hablamos de una *d-bola* nos estamos refiriendo a la región encerrada por una *(d-1)-esfera*. Para tener una idea más clara consideremos el caso $\mathbb{R}^3$, osea $d = 3$, en donde definimos una *3-bola* por

$$B^3(R): \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2 \tag{1}$$

cuya región es el espacio encerrado por la *2-esfera*:

$$S^2(R): \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \tag{2}$$

En dimensiones arbitrarias definimos las bolas y las esferas como subespacios de $\mathbb{R}^d$ como sigue:

$$B^d(R): \quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 \leq R^2 \tag{3}$$

Cuya región es el espacio encerrado por la $S^{d-1}(R)$:

$$S^{d-1}(R): \quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 = R^2 \tag{4}$$

En general, cuando trabajamos en varias dimensiones, siempre se hará referencia a volúmenes. Así, en un espacio

[1] Dimensiones puramente espaciales

unidimensional tomamos el volumen como significado de longitud, y en un espacio bidimensional tomamos el volumen como significado de área. El volumen de una esfera $S^{d-1}(R)$ está relacionado al volumen de una esfera de radio unitario S^{d-1} mediante la siguiente relación:

$$Vol(S^{d-1}(R)) = R^{d-1}Vol(S^{d-1}) \tag{5}$$

Sin embargo, hay que definir cual es el volumen de la esfera de radio unitario S^{d-1}. Para calcular este volumen haremos uso de las propiedades de la función Gaussiana

$$f(x_1, \ldots, x_d) = e^{\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{d} x_i^2\right)}, \tag{6}$$

cuya función está definida como un producto de funciones de una variable cualquiera. Integrando 6 sobre todo el espacio $\mathbb{R}^d$ tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f dV = \prod_{i=1}^{d} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_i{}^2}{2}} dx_i = 2\pi^{d/2} \tag{7}$$

Partiendo del hecho de que 6 es un invariante ante transformaciones. Nos interesa conocer 7 en coordenas esféricas

$$\int_{\mathbb{R}^d} f dV = \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} Vol(S^{d-1}(r))dr, \tag{8}$$

donde $S^{d-1}(r)$ es el volumen de la *(d-1)-esfera* de radio r. Utilizando 5, podemos escribir 8 como:

$$Vol(S^{d-1}) \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r^{d-1} dr, \tag{9}$$

que al realizar el cambio de variable $t = r^2/2$ la expresión anterior se convierte en

$$Vol(S^{d-1}) 2^{n/2-1} \int_0^{\infty} e^{(-t)r^{t/2-1}} dt \tag{10}$$

La expresión anterior debe arrojar el mismo resultado encontrado en 7. Mediante estos resultados podemos derivar una expresión para el volumen de S^{d-1}.

$$Vol(S^{d-1}) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \tag{11}$$

De 5, el volumen de una esfera de radio r está dado por

$$Vol(S^{d-1}(r)) = r^{d-1}\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \tag{12}$$

Si queremos derivar el volumen de una bola de radio R, integramos 12 para r entre 0 y R.

$$Vol(B^d(R)) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}R^d \tag{13}$$

III. Densidad de Carga

Podemos intuir fácilmente que la densidad de carga tiene una representación en más dimensiones si la integramos en todo el volumen de una *d-bola*, si ésta es constante

$$q = \int_{B^d} \rho \ d(vol) = \rho \ vol[B^d(R)] \tag{14}$$

el volumen de una *d-bola* ya lo conocemos, así que sustituyendo 13 en 14

$$\rho = \frac{\Gamma(1+d/2)}{\pi^{d/2}} \frac{q}{r^d} \tag{15}$$

Con éste método podemos recuperar el resultado para un disco ($d = 2$) y una esfera ($d = 3$), que se pueden encontrar en los textos convencionales de electromagnetismo ver([2], [3], [4], [9], [10])

$$\frac{q}{\pi r^2} \ ; \ d = 2, \tag{16}$$

$$\frac{3q}{4\pi r^3} \ ; \ d = 3 \tag{17}$$

Vemos que la densidad de carga es precisamente la carga total para $d = 0$, lo cual se interpreta como la carga puntual que encierra un volumen de dimensión cero.

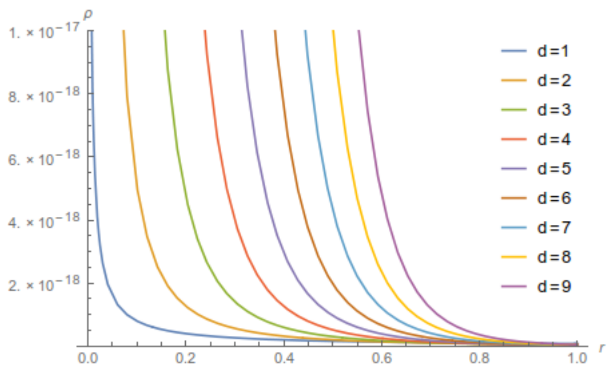

Figura 1: *Densidad de carga en función de r*

IV. Campo Eléctrico

El campo eléctrico en dimensiones extras se puede determinar a partir de la ley de Gauss

$$\nabla \cdot E = \rho \tag{18}$$

integrando a ambos lados sobre el volumen de una *d-bola*

$$\int_{B^d} \nabla \cdot E \ d(vol) = \int_{B^d} \rho \ d(vol) \tag{19}$$

y aplicamos el teorema de la divergencia a 19

$$\int_{S^{d-1}} E \ d(vol) = \int_{B^d} \rho \ d(vol) \tag{20}$$

el lado derecho de 20 representa la carga total encerrada por la *d-bola* y del lado izquierdo sustituimos el volumen de una *(d-1)-esfera* para tener una representación del campo eléctrico en más dimensiones

$$E(r) = \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}} \frac{q}{r^{d-1}} \tag{21}$$

El campo eléctrico comienza a tener sentido para $d > 0$, en $d = 0$ la función gamma, gráficamente, tiene una asíntota. Además, al ser una cantidad que viene de la definición para la fuerza de Coulomb, ésta necesita obligatoriamente, al menos, una dimensión (la distancia que existe entre las cargas).

También podemos reproducir el campo eléctrico para los casos típicos de un disco y una esfera:

$$\frac{q}{2\pi r} \; ; \; d = 2, \tag{22}$$

$$\frac{q}{4\pi r^2} \; ; \; d = 3 \tag{23}$$

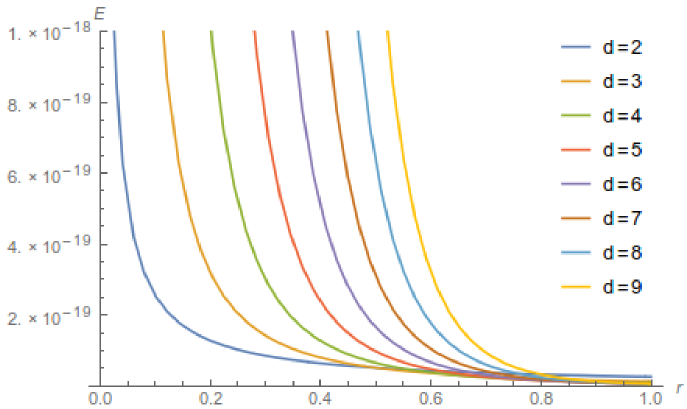

Figura 2: *Magnitud del campo eléctrico en función de r*

V. Potencial Escalar

De 21 encontramos el potencial escalar en más dimensiones usando

$$E = \nabla\phi \tag{24}$$

en coordenadas esféricas escribimos:

$$E = \frac{\partial\phi}{\partial r} \tag{25}$$

para el cual solo se requiere hacer la integral respecto a "r" para obtener

$$\phi = \int E \; dr = \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}} \frac{q}{r^{d-1}} \frac{1}{d-2}$$

$$\phi(r) = \frac{\Gamma(d/2-1)}{4\pi^{d/2}} \frac{q}{r^{d-2}} \tag{26}$$

El potencial eléctrico solo tiene sentido para $d > 2$, esto se debe a que en realidad el potencial eléctrico es una pequeña parte e una superficie equipotencial, la cual necesita forzosamente tres dimensiones.

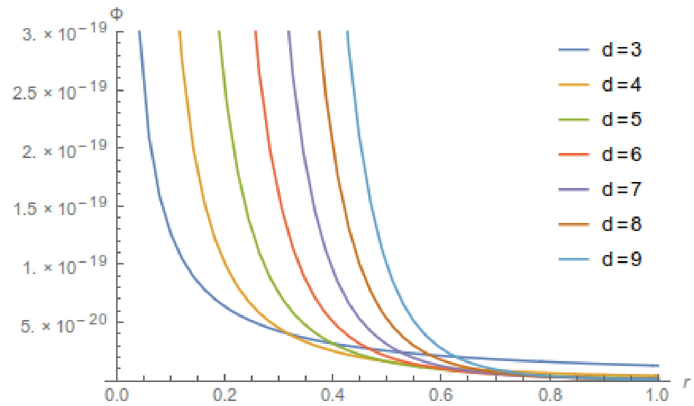

Figura 3: *Potencial escalar en función de r*

VI. Densidad de Corriente

También podemos determinar la densidad de corriente utilizando la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot J + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{27}$$

utilizando el mismo análisis para el campo eléctrico encontramos:

$$J(r) = \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}} \frac{I}{r^{d-1}} \tag{28}$$

donde 28 nos queda en términos de la corriente debido a la derivada temporal de la carga eléctrica.

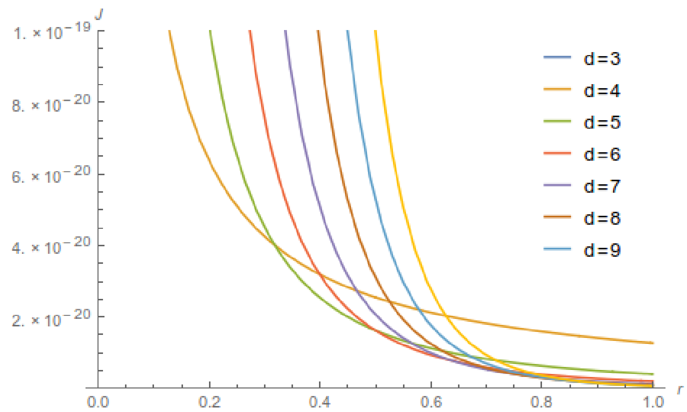

Figura 4: *Densidad de corriente en función de r*

VII. Resultados

Los resultados obtenidos son interesantes ya que las expresiones encontradas para dimensiones extras, explícitamente, nos dicen para que dimensiones tienen sentido físico y también, con ellos se recuperan los casos típicos de la electrostática.

A en el cuadro 1 mostramos el comportamiento explícito de cada cantidad para algunas dimensiones espaciales.

En el cuadro 2 presentamos la magnitud, expresada numéricamente, de cada una de las cantidades encontradas para diferentes dimensiones medidas a una distancia de

d	$\rho(r)$	$E(r)$	$\phi(r)$	$J(r)$
0	q	-	-	-
1	$q/2r$	$q/2$	-	$I/2$
2	$q/\pi r^2$	$q/2\pi r$	-	$I/2\pi r$
3	$3q/4\pi r^3$	$q/4\pi r^2$	$q/4\pi r$	$I/4\pi r^2$
4	$2q/\pi^2 r^4$	$q/2\pi^2 r^3$	$q/4\pi^2 r^2$	$I/2\pi^2 r^3$
5	$15q/8\pi^2 r^5$	$3q/8\pi^2 r^4$	$q/8\pi^2 r^3$	$3I/8\pi^2 r^4$
6	$6q/\pi^3 r^6$	$q/\pi^3 r^5$	$q/4\pi^3 r^4$	$I/\pi^3 r^5$

Cuadro 1: *Expresiones para ρ, E, ϕ y J*

d	$\rho(r)$	$E(r)$	$\phi(r)$	$J(r)$
3	10^{-11}	10^{-14}	10^{-17}	10^{-17}
4	10^{-8}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-15}
5	10^{-5}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-12}
6	10^{-2}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-9}
7	10	10^{-3}	10^{-7}	10^{-7}

Cuadro 2: *Orden de magnitud para ρ, E, ϕ y J en función de la dimensión*

1 cm, utilizando la carga de un electrón (1.602×10^{-19}C) y usando unidades *Heaviside-Lorentz*.

Podemos observar que; a medida la dimensión aumenta, también aumenta la magnitud. Esto lo consideramos relevante, ya que a medida nos introducimos en más dimensiones encontramos comportamientos físicos muy interesantes. Esto es uno de los temas que se están tratando actualmente en teoría de cuerdas, y estos criterios podría ser aplicables a agujeros negros, materia condensada, física de partículas, etc.

Expresar cantidades físicas en más dimensiones podrian ser muy útiles debido a que una teoría de supercuerdas está en diez dimensiones (una temporal y nueve espaciales). Uno de los problemas que se tienen, hasta el momento, es que la física como la conocemos es totalmente funcional en tres dimensiones espaciales y actualmente hay personas trabajando para compactar estas dimensiones sobrantes. Pero, existen 10^{500} formas de compactificarlas y solo una de ellas reproduce lo que conocemos como el modelo estándar de partículas.

Evidentemente; nuestro trabajo tiene un enfoque puramente teórico en el que nos damos cuenta que las física como la conocemos es solo un caso particular de una teoría que generaliza más dimensiones.

En este trabajo, hemos hechos análisis para casos estáticos. Quedará para un artículo futuro estudiar la dinámica de éstas mismas cantidades.

Agradecimientos

Agradecemos a Bryan O. Larios por habernos brindado el conocimiento necesario para el desarrollo de este artículo, por habernos dado la motivación de estudiar teoría de cuerdas como un tópico fascinante de la física. También agradecemos a la Escuela de Física por brindarnos la oportunidad de publicar este artículo. Ayudando así a nuestra formación como investigadores.

Referencias

[1] A. Einstein and P. Bergmann. On a Generalization of Kaluza's Theory of Electricity. *Annals of Mathematics*, 39(3):683–701, July 1938.

[2] J. Franklin. *Classical Electromagnetism.* 1st edition, 2005.

[3] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*, volume 1. 3rd edition, 1999.

[4] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*, volume 1. 3rd edition, 1999.

[5] P. Jordan. Erweiterung der projektiven Relativitätstheorie. *Ann. Phys. (Leipzig) 1*, 219, 1947.

[6] T. Kaluza. Zum Unitätsproblem der Physik, Sitz. *Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. K1*, 966, 1921.

[7] O. Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Phys.*, 37(895.), January 1926.

[8] G. Nordströmin. Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzips. *Ann. Phys.*, 42, 1913.

[9] M. Schwartz. *Principles of Electrodynamics* , volume 1. 1st edition, 1987.

[10] R. K. Wangsness. *Electromagnetic Fields*, volume 1. 3rd edition, 2006.

[11] B. Zwiebach. *A First Course in String Theory.* 1st edition, 2009.