Aplicaciones de Álgebra Geométrica en Relatividad Especial

Luis Alcerro[1] y Gerhard Rummel[2]

[1]Escuela de Física - UNAH, mail: luisalcerro@hotmail.com
[2]Escuela de Física - UNAH, mail: unahef-carrera@yahoo.com.mx

Recibido: 24 de Septiembre de 2015 / Aceptado: 10 de Noviembre de 2015

Resumen

Mathematics is the language par excellence of physics. However, there is no universal algebra system to treat it in its various branches. Regardless of the area being studied, there are "preset" fundamental and essential mathematical treatments to deal with it. However, in most cases the implementation of more sophisticated algebraic systems work best for describing physical phenomena.
The geometric algebra has considerable simplifications in various areas of physics, particularly in special relativity, the latter being the first modern implementation that was given to this algebra.

Keywords: algebra, relativity, transformations.

La matemática es el lenguaje por excelencia de la física. Sin embargo, no existe un sistema algebraico universal para tratarla en sus diversas ramas. Independientemente del área que se estudie, existen tratamientos matemáticos "preestablecidos" para abordarla, fundamentales e imprescindibles. Sin embargo, en la mayoría de casos la implementación de sistemas algebraicos mas sofisticados funcionan mejor para la descripción de fenómenos físicos.
El álgebra geométrica presenta considerables simplificaciones en varias áreas de la física, particularmente en la relatividad especial, siendo esta última la primera implementación moderna que se le dio a esta álgebra.

Palabras clave: álgebra, relatividad, transformaciones.

I. Álgebra del espacio-tiempo

El álgebra de espacio-tiempo es un álgebra generada por un conjunto de 4 vectores ortogonales $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, que satisfacen:

$$\gamma_0^2 = 1,\ \gamma_0 \cdot \gamma_i = 0,\ \gamma_i \cdot \gamma_j = -\delta_{ij},\ i, j = 1, 2, 3 \qquad (1)$$

Es decir,

$$\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu} = diag(+---),\ \ \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \qquad (2)$$

Se define un marco recíproco $\{\gamma^\mu\}$ al marco $\{\gamma_\mu\}$, con

$$\gamma^0 = \gamma_0 \qquad\qquad \gamma^i = -\gamma_i, \qquad (3)$$

así que:

$$\gamma^i \cdot \gamma_j = \delta_{ij}. \qquad (4)$$

De modo que un evento en el espacio-tiempo puede ser representado por el vector x, con coordenadas x^μ en el marco $\{\gamma_\mu\}$ como:

$$x = x^\mu \gamma_\mu = ct\gamma_0 + x^i \gamma_i \qquad (5)$$

Se utilizarán unidades en que $c = 1$, de modo que este factor puede ser insertado en cualquier momento para que la expresión sea consistente con sus dimensiones.

Debido a que se tiene una signatura mixta, el cuadrado de un vector no será siempre positivo, es decir, para cierto vector a:

$$a^2 = aa = \epsilon|a| \qquad (6)$$

donde ϵ es la signatura, que puede tomar los valores de $0, \pm 1$.

II. Álgebra de bivectores

Para dos vectores ortogonales a, b se tiene:

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow (a \wedge b)^2 = abab = -a^2 b^2 \qquad (7)$$

En este álgebra se tienen 6 bivectores, que se pueden clasificar en los que poseen componente temporal $(\gamma_i \wedge \gamma_0)$ y los que no $(\gamma_i \wedge \gamma_j)$.
El cuadrado de estos dos tipos de bivectores posee diferente signo:

$$(\gamma_i \gamma_j)^2 = -\gamma_i^2 \gamma_j^2 = (\gamma_i \wedge \gamma_j)^2 = -1 \qquad (8)$$

$$(\gamma_i \gamma_0)^2 = -\gamma_i^2 \gamma_0^2 = (\gamma_i \wedge \gamma_0)^2 = +1 \qquad (9)$$

Una propiedad inmediata de los bivectores con cuadrado positivo resulta ser:

$$e^{\alpha\gamma_i\gamma_0} = \cosh(\alpha) + \sinh(\alpha)\gamma_i\gamma_0 \qquad (10)$$

Este resultado nos muestra que estamos en una geometría hiperbólica, algo fundamental para el tratamiento de la relatividad especial.

III. Vector relativo y obtención del intervalo invariante

Considere un observador inercial que se mueve a una velocidad constante v. Si definimos el marco $\{e_\mu\}$, el vector velocidad v puede ser elegido de modo que coincida con el vector temporal e_0 de este marco. Los vectores restantes e_i son elegidos de modo que formen un conjunto ortonormal de vectores tipo espacio perpendicular a $e_0 = v$.

Un evento puede descomponerse en este marco, de esta manera:

$$x = te_0 + x^i e_i \tag{11}$$

donde

$$t = x \cdot e_0 = x \cdot v \tag{12}$$

y las coordenadas espaciales son:

$$x^i = x \cdot e^i. \tag{13}$$

Supongamos un evento como un punto en la línea de universo. El vector tridimensional para este punto es:

$$\begin{aligned} x^i e_i &= x^\mu e_\mu - x^0 e_0 = x - x \cdot vv \\ &= (xv - x \cdot v)v = x \wedge vv. \end{aligned} \tag{14}$$

Al bivector en el espacio-tiempo $x \wedge v$ le llamaremos vector relativo

$$\boldsymbol{x} = x \wedge v. \tag{15}$$

Así, tenemos:

$$xv = x \cdot v + x \wedge v = t + \boldsymbol{x}. \tag{16}$$

La distancia invariante se descompone:

$$x^2 = xvvx = (t + \boldsymbol{x})(t - \boldsymbol{x}) = t^2 - \boldsymbol{x}^2 \tag{17}$$

obteniendo así el intervalo invariante.

IV. Construcción de la velocidad relativa

Supongamos que un observador con velocidad v mide la velocidad relativa de una partícula con velocidad propia $u(\tau) = \dot{x}(\tau)$, $u^2 = 1$. Tenemos:

$$uv = \frac{d}{d\tau}(x(\tau)v) = \frac{d}{d\tau}(t + \boldsymbol{x}) = u \cdot v + u \wedge v, \tag{18}$$

entonces

$$\frac{dt}{d\tau} = u \cdot v, \qquad \frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} = u \wedge v. \tag{19}$$

Por tanto, la velocidad relativa $\boldsymbol{u}$ medida desde el marco v es:

$$\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{u \wedge v}{u \cdot v}. \tag{20}$$

Esta construcción es consistente con la simetría en la relatividad especial, ya que si intercambiamos v por u,

$$\boldsymbol{v} = \frac{v \wedge u}{v \cdot u} = -\frac{u \wedge v}{u \cdot v} = -\boldsymbol{u}, \tag{21}$$

es decir el segundo observador verá la misma velocidad relativa pero en dirección opuesta a como la vería el primer observador.
Observemos que la magnitud de la velocidad relativa será siempre menor que 1.

$$\boldsymbol{u}^2 = \frac{(u \wedge v)^2}{(u \cdot v)^2} = 1 - \frac{1}{(u \cdot v)^2} < 1. \tag{22}$$

Para construir el factor de Lorentz hacemos:

$$\gamma^{-2} = 1 - \boldsymbol{u}^2 = \frac{1}{(u \cdot v)^2}, \tag{23}$$

vemos que:

$$\gamma = u \cdot v. \tag{24}$$

Así podemos descomponer la velocidad propia como:

$$u = uvv = (u \cdot v + u \wedge v)v = \gamma(1 + \boldsymbol{u})v. \tag{25}$$

V. Transformaciones de Lorentz

Suponga dos marcos inerciales S y S'. Los ejes 1 y 2 de ambos sistemas coinciden, pero el marco S' se mueve a lo largo del tercer eje del marco S a una velocidad β. El origen de ambos sistemas coincide para $t = t' = 0$.
Denotaremos las coordenadas 0 y 3 del sistema S como t, z, y las del sistema S' como t', z'.
La transformación de Lorentz para estos sistemas está dada por las relaciones:

$$t' = \gamma(t - \beta z), x^{1'} = x^1, x^{2'} = x^2, z' = \gamma(z - \beta t) \tag{26}$$

y la transformación inversa:

$$t = \gamma(t' + \beta z'), x^1 = x^{1'}, x^2 = x^{2'}, z = \gamma(z' + \beta t') \tag{27}$$

Un evento en el espacio-tiempo, representado por el vector x puede ser descompuesto en los vectores del marco S y S',

$$x = x^\mu \boldsymbol{e}_\mu = x^{\mu'} \boldsymbol{e}'_\mu. \tag{28}$$

Concentrándonos nada mas en los índices 0 y 3, tenemos

$$t\boldsymbol{e}_0 + z\boldsymbol{e}_3 = t'\boldsymbol{e}'_0 + z'\boldsymbol{e}'_3. \tag{29}$$

De (25) y (27) se pueden obtener las transformaciones de los vectores de marco entre S y S',

$$\boldsymbol{e}'_0 = \gamma(\boldsymbol{e}_0 + \beta\boldsymbol{e}_3), \boldsymbol{e}'_3 = \gamma(\boldsymbol{e}_3 + \beta\boldsymbol{e}_0). \tag{30}$$

Observemos que esta transformación mantiene la normalización correcta de los vectores del marco:

$$(\boldsymbol{e}'_0)^2 = \gamma^2(1 - \beta^2) = 1, \qquad (\boldsymbol{e}'_3)^2 = -1. \tag{31}$$

Ahora, hacemos un cambio de variable introduciendo un ángulo hiperbólico (rapidez),

$$\tanh(\alpha) = \beta, \tag{32}$$

entonces

$$\gamma = (1 - \tanh^2(\alpha))^{-1/2} = \cosh(\alpha). \tag{33}$$

Con este cambio, $\boldsymbol{e}_0'$ resulta,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_0' &= \cosh(\alpha)\boldsymbol{e}_0 + \sinh(\alpha)\boldsymbol{e}_3 \\ &= \exp(\alpha\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_0)\boldsymbol{e}_0. \end{aligned} \tag{34}$$

De manera similar,

$$\boldsymbol{e}_3' = \exp(\alpha\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_0)\boldsymbol{e}_3. \tag{35}$$

Ya que los vectores $\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{e}_2$ no sufren ningún cambio, podemos escribir la relación entre los dos marcos de la forma:

$$\boldsymbol{e}_\mu' = R\boldsymbol{e}_\mu\tilde{R}, \qquad \boldsymbol{e}^{\mu'} = R\boldsymbol{e}^\mu\tilde{R}, \tag{36}$$

donde

$$R = \exp(\alpha\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_0/2), \qquad \tilde{R} = \exp(-\alpha\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_0/2). \tag{37}$$

Así, la transformación de Lorentz para el evento x es:

$$x' = Rx\tilde{R}. \tag{38}$$

La ecuación (37) nos presenta dos resultados importantes:

1. La sustitución de una matríz de 4×4 por un rotor para construir una transformación de Lorentz activa. Esto nos ofrece una simplificación considerable
2. Se prescinde totalmente de un sistema coordenado, en contraste con (25).

Referencias

[1] D. Hestenes y C. Doran *Geometric Algebra for Physicists*, págs. 126–141 , 2007

[2] D. Hestenes *Tutorial on Geometric Calculus*, págs. 3–4

[3] D. Hestenes *Primer on Geometric Algebra for introductory mathematics and physics*, págs. 4–8 , 2005

[4] D. Hestenes *Spacetime Physics with Geometric Algebra*, págs. 3–5, 13–17 , 2003

[5] D. Hestenes *Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics*, págs. 9–13 , 2002

[6] B.F. Schutz *A first course in general relativity*, págs. 9–17, 21–23, 41–44, 49–50 , 2009