



Aspectos bibliográficos en la investigación sobre conceptos de infinito, límite y derivada

Karin Gisela Lobo Cruz¹
David Noely Fuentes Herrera²
Jared Laban Morales Ochoa³

Información de artículo:

Recibido: 01/09/2022

Aprobado: 30/11/2022

Palabras claves:

Infinito, obstáculo, límite, derivada, comprensión

Keywords:

infinity, obstacle, limit, comprehension

Resumen

La evolución conceptual desde una perspectiva educativa nos hace identificar diferentes obstáculos para la construcción de conceptos como el infinito, límite y el concepto de la derivada, las dificultades que tienen los estudiantes para comprender estos conceptos nos lleva a plantearnos una serie de interrogantes que son parte del quehacer de la investigación en educación matemática, en este artículo se expone la revisión de 15 artículos seleccionados se inicia con la exposición de los métodos e instrumentos para seleccionar y buscar los materiales, posteriormente se enumeran los artículos seleccionados ubicándolos en categorías de análisis según la profundidad del aspecto investigativo de cada artículo y finalmente se presentan los resultados y se argumenta situaciones encontradas combinando diferentes resultados, para luego presentar conclusiones y perspectivas que se pueden explorar sobre el tema en el futuro.

Bibliographical aspects in research on the concepts of infinity, limit, and derivative

Abstract

The conceptual evolution from an educational perspective makes us identify different obstacles for the construction of concepts such as infinity and the concept of limit, the difficulties that students have to understand these concepts leads us to ask ourselves a series of questions that are part of the work of research in mathematics education, in this article the review of 15 selected articles is exposed, it begins with the exposition of the methods and instruments

¹ Licenciada en Matemáticas. Estudiante de la Maestría en Matemática Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. ✉: karincitalobo@gmail.com  <https://orcid.org/0000-0003-0529-8048>

² Licenciado en Matemáticas. Estudiante de la Maestría en Matemática Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. ✉: dnfuentes@e.upnfm.edu.hn  <https://orcid.org/0000-0003-1065-3112>

³ Licenciado en Matemáticas. Estudiante de la Maestría en Matemática Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. ✉: jlmoraleso@e.upnfm.edu.hn  <https://orcid.org/0000-0002-7908-6649>



to select and search for the materials. Later the selected articles are listed, placing them in categories of analysis according to the depth of the aspect investigation of each article and finally the results are presented, and situations found are argued combining different results, to present conclusions and perspectives that can be explored on the subject in the future.

1. Introducción

El objetivo de este artículo es sistematizar la información de artículos que abordan los conceptos sobre infinito, el límite y la derivada desde las perspectivas epistemológica, práctica e investigativa. Se trata de realizar un análisis, para profundizar puntos de vista requeridos en la investigación de estos conceptos. Se trata de evidenciar los hallazgos de autores sobre estos temas, por medio de la revisión y exploración del contenido de revistas científicas, ilustrado en un mapa mental que muestra el análisis desde la perspectiva epistemológica, práctica e investigativa. Las fuentes de información utilizadas son artículos de revistas científicas que impulsan la investigación en educación matemática, se tomaron como ejes centrales en esta búsqueda bibliográfica lo que se conoce y lo que se ha investigado de estos temas.

2. Metodología de la Investigación

2.1 Métodos

Esta investigación es cualitativa porque se trata de un proceso interpretativo de indagación, donde el investigador construye una imagen compleja y holística de la realidad, presentando detalladas perspectivas de los informantes y conduce el estudio en una situación natural (Creswell *et al.*, 2007). Sustentado en un abordaje hermenéutico porque se interpretaron los significados de textos y acciones vinculadas a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

2.2 Instrumentos

Se utilizó el método análisis de contenido porque contribuye a desarrollar una revisión sistemática y analítica a partir de la técnica de análisis documento, mediante un instrumento de guía de preguntas siguientes: ¿Qué características tiene la dimensión epistémica de los conceptos sobre infinito, límite y derivada? ¿Qué características tiene la dimensión práctica de los conceptos sobre infinito, límite y derivada? ¿Qué características tiene la dimensión investigativa de los conceptos sobre infinito, límite y derivada?

2.3 Material recolectado

La recolección del material empírico se centró en artículos de revistas científicas publicados entre 2010 y 2022. La búsqueda de éstos se realizó en las bases de datos siguientes: Redalyc; Scielo y Google Académico. Los términos de búsqueda usados en ambos grupos fueron: resolución de problemas, procesos matemáticos, obstáculos, dominio afectivo, dificultades de aprendizaje y comprensión matemática.

Tabla 1. Material recolectado

Artículo	Revistas	2002-2009	2010-2016	2017-2022
Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite	Premisa			2019
El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones.	Uno: Revista de didáctica de las matemáticas	2003		
Introducción al Infinito	Acta Latinoamericana Matemática Educativa Vol. 17	2004		
Concepciones dinámicas y estáticas del infinito: procesos continuos y sus totalidades.	ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 40-1 (2022), 179-197 Investigaciones didácticas			2022
El infinito Escolar	Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1117-1126). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.	2009		
Desarrollo histórico e implicancias en el aprendizaje del infinito: estudiar la evolución de su tratamiento para desarrollar estrategias que favorezcan su comprensión.	UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática.			2018
Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria.	REDINED Red de Información Educativa	2009		
Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función.	REDI Revista de investigación y experiencias didácticas		2011	
Análisis de un Proceso de Estudio sobre la enseñanza del Límite de una Función.	SCIELO Biblioteca científica electrónica en línea		2012	
Obstáculos epistemológicos sobre los conceptos de límite y continuidad en cursos de cálculo diferencial en programas de ingeniería.	Revistas UFPS Universidad Francisco de Paula Santander			2017
Análisis didáctico con base en el enfoque ontosemiótico de un problema relativo a la derivada.	Revista de Nuevas Tecnologías y Sociedad		2012	

Artículo	Revistas	2002-2009	2010-2016	2017-2022
Influencia de curso precálculo en ecuaciones diferenciales y desarrollo de pensamiento variacional.	Boletín Redipe			2018
Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: Una aproximación socio epistemológica.	Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa.	2002		
Idoneidad Epistémica del Significado de la Derivada en el Currículo de Bachillerato.	Centro de Investigaciones Educativas Paradigma		2013	
La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia	Universidad Autónoma de Barcelona	2004		

2.4 Categorías de análisis

A partir de la clasificación Blanco-Álvarez *et al.* (2017), se proponen las dimensiones emergentes: epistémica, práctica e investigativa. Emergen los significados siguientes:

- **Epistémica.** Desarrollo histórico e implicancias en el aprendizaje del infinito: estudiar la evolución de su tratamiento para desarrollar estrategias que favorezcan su comprensión. Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria. Obstáculos epistemológicos sobre los conceptos de límite y continuidad en cursos de cálculo diferencial en programas de ingeniería.
- **Práctica.** El infinito Escolar. Concepciones dinámicas y estáticas del infinito: procesos continuos y sus totalidades. El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. Promover el desarrollo de configuraciones discentes tanto personal y en trabajo colectivo.
- **Investigativa.** Introducción al Infinito. Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una función. Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. Desarrollar procesos del pensamiento.

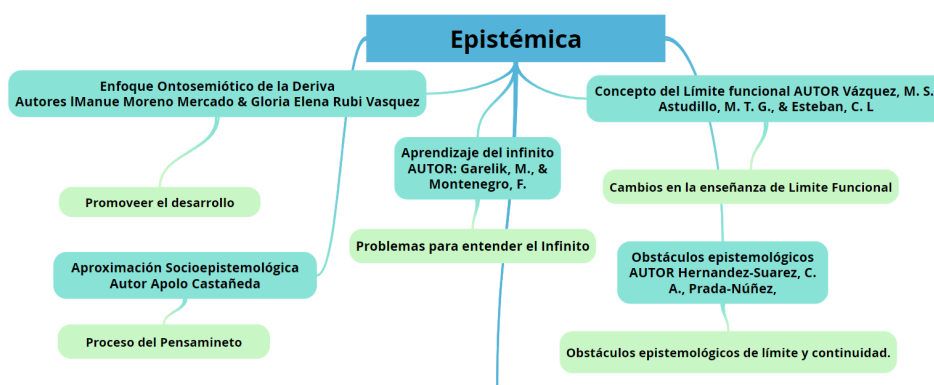
3. Resultados y discusión

A continuación, se presenta el resultado de análisis de las tres categorías o dimensiones emergentes.

3.1 Dimensión epistémica de los conceptos sobre infinito, límite y derivada

En Garelik y Montenegro (2018), se manifiestan que el estudiante presenta dificultades cuando resuelve problemas que involucran el infinito y cuando se le consultan situaciones informales en donde se necesita la concepción del infinito. También, Hernández-Suarez, Prada-Núñez y Ramírez-Leal (2017), mencionan que la presencia de dificultades en el manejo de los conceptos matemáticos no recae sólo en el estudiante y en sus capacidades, sino que el aprendizaje del estudiante termina siendo el producto de las dificultades conceptuales o las mismas concepciones presentes en los docentes que han orientado su proceso educativo. Por otra parte, Vázquez, Astudillo y López (2009), han hecho un análisis de los cambios que se han producido en libros de texto de bachillerato en un periodo de los últimos 50 años en el concepto de límite funcional, determinando que los cambios se han centrado en el análisis conceptual centrado en educación media, sin tomar en cuenta otros aspectos importantes como ser secuenciación de contenidos y un análisis didáctico-cognitivo para seguir en el nivel universitario.

Figura 1. Dimensión epistémica de los conceptos sobre infinito, límite y derivada.



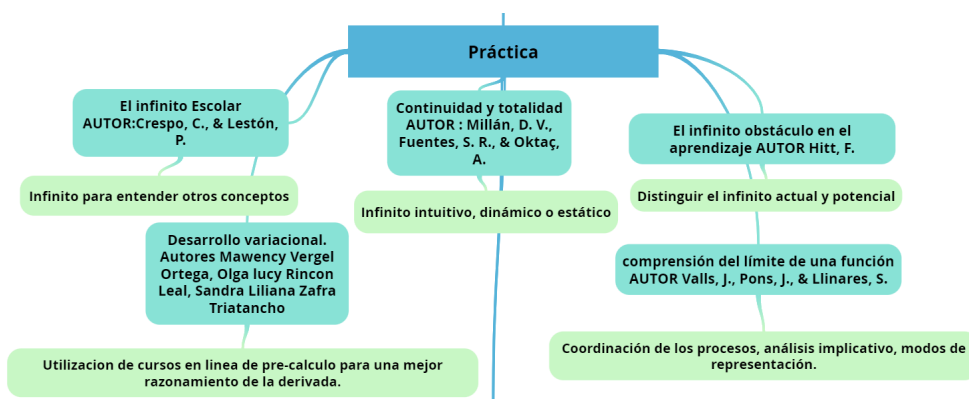
Mientras el estudio de Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013), sobre la Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato, explican que una adecuación no satisfactoria del objeto matemático de la derivada podría obstaculizar tanto la correcta comprensión de los estudiantes como de los docentes en la formación inicial. Finalmente, Castañera (2002), en su estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: Una aproximación socio epistemológica dirigió sus esfuerzos al análisis de la derivada, en particular buscando caracterizar en ella una de las propiedades de la curva que se relaciona directamente con el punto de inflexión. Así, se presentó primero un bosquejo socio epistemológico de la idea y después una caracterización con base al estudio que realizó. En definitiva, los autores coinciden en que los conceptos matemáticos como el infinito, el límite y la derivada requieren una reflexión espontánea de la naturaleza que se desarrolla al enfrentar lo cotidiano

y la respuesta a las dificultades conceptuales a partir de la transposición didáctica adecuada de los docentes.

3.2 Dimensión práctica de los conceptos sobre infinito, límite y derivada

Valls, Pons y Llinares (2011) hacen una caracterización de los procesos de aproximación vinculados a la comprensión del límite de una función mediante una intervención en aula y señalan que para la comprensión métrica de límite el estudiante debe ser capaz de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden. Crespo y Lestón (2009), realizan una intervención a estudiantes de onceavo grado mediante una encuesta de 30 preguntas y consignas en las cuales se les recordaba algunas de las definiciones con las que se había trabajado hasta ese momento y se les pedía que definiera con sus propias palabras cuestiones como asíntota, dominio, infinito y aproximación infinita; del análisis de resultados se aprecia que los estudiantes entran al aula con toda una cultura construida previamente, y que, aunque la escuela la rechace, se hace presente cada vez que piensan, hablan o niegan algo de lo que les presentamos, y que esa cultura siempre tendrá un peso mayor que el que pueda tener lo que construyen en la escuela.

Figura 2. Dimensión práctica de los conceptos sobre infinito, límite y derivada



En este mismo sentido de la comprensión del infinito los autores Millán, Fuentes y Oktaç (2022), en su estudio sobre la comprensión del infinito matemático, referente a procesos continuos y sus totalidades aplicaron un instrumento compuesto por dos problemas relacionados con la recta tangente a una curva que no han sido estudiados, a trece personas con amplios conocimientos en matemáticas (profesores con experiencia en la enseñanza de matemáticas universitarias, estudiantes de posgrado en matemáticas y matemática educativa), con el fin de asegurar que no tuvieran dificultades con los conocimientos básicos requeridos para abordar dichas situaciones, en esta intervención se evidencia que el proceso continuo infinito manifiesta la idea

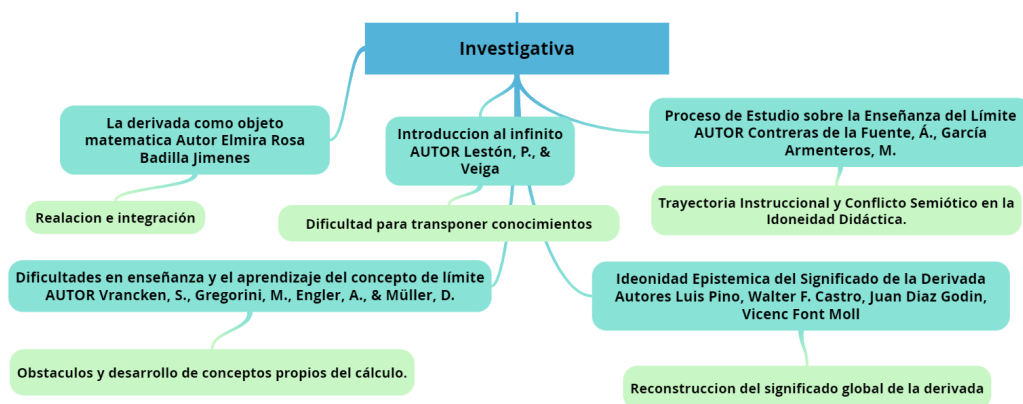
de límite, que es clave para determinar la concepción que se posee sobre el infinito en este contexto.

Hitt, (2003), en su artículo el concepto de infinito: un obstáculo en el aprendizaje de funciones, límite y continuidad realiza una intervención a 12 profesores de matemáticas de enseñanza media y de ingeniería agropecuaria con respecto al concepto de límite, en el desarrollo es notorio que los problemas que tienen algunos profesores son transmitidos a sus alumnos. Por tal motivo, tenemos un doble problema, uno que tiene que ver con la complejidad del concepto de infinito que se quiere que los alumnos construyan y el otro que tiene que ver con los obstáculos promovidos por la manera como se aborda dicho concepto en el aula de matemáticas. Según Vergel, Rincón y Zafra (2018), en su artículo de la Influencia de cursos precálculo en ecuaciones diferenciales y desarrollo pensamiento variacional, hicieron una intervención en el aula virtual con un enfoque cuantitativo, en donde los alumnos se vieron favorecidos en desarrollo de competencias en interpretación, pensamiento variacional, preconceptos matemáticos y la mejora en resultados de solución de ecuaciones diferenciales. La diversidad de intervenciones en aula que presentan los artículos descritos nos plantea la multiplicidad de significados que profesores y estudiantes le asignan a un mismo concepto matemático, esta situación manifiesta que ambos deben realizar la traducción de los problemas desde el mundo real al matemático, para esto necesitan ejecutar una serie de procesos que se sustentan en la comprensión que cada uno ha adquirido de los temas.

3.3 Dimensión investigativa de los conceptos sobre infinito, límite y derivada

La dimensión investigativa de los conceptos de infinito, límite y derivada inicia con la propuesta de Badillo-Jiménez (2004) que, realiza un abordaje de la derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje. En el contexto del sistema educativo colombiano manifiesta el beneficio que sería articular el conocimiento didáctico del contenido del concepto de la derivada con el objetivo de enseñanza y aprendizaje en el nivel de bachillerato, en este mismo sentido también le concede importancia a las formas como los profesores interpretan y justifican las situaciones concretas de enseñanza en las que actúan. Un resultado importante de la investigación de este autor es una propuesta para la formación permanente de los docentes para una solución del fenómeno detectado.

Figura 3. Dimensión Investigativa de los conceptos sobre infinito, límite y derivada



Moreno-Mercado, Pou-Alberú, Rubi y Jordan (2002), plantean que, el desarrollo de configuraciones discentes personales y de trabajo cooperativo, estimulan no sólo el trabajo intelectual independiente del estudiante sobre una situación problemática a su alcance, también la reflexión sobre las respuestas dadas. Vrancken, Gregorini, Engler y Müller (2006) realizaron actividades para encontrar dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite y en general no se cometen errores para determinar el valor de la función al igual que en la determinación del límite por derecha, como resultado de investigación se plantea la dificultad de los estudiantes para dibujar una gráfica que cumpla todos los requisitos solicitados, en este sentido la mayoría de dificultades se observaron en el tratamiento de las indeterminaciones y la factorizaciones de expresiones algebraicas.

Lestón y Veiga (2004), destacan una experiencia sobre el análisis de algunos problemas clásicos y lecturas complementarias para abordar la enseñanza del tema del infinito como expresión puramente matemática, con el fin de lograr el buen manejo de un concepto tan complejo, concluyen que la enseñanza de este tema debe referirse a una experiencia de aprendizaje gradual y significativo a través de problemas y lecturas sencillas. En definitiva, los resultados de investigación consideran aristas para planificar el abordaje de estos temas en las transposiciones que desarrollan los docentes, hasta este punto esta revisión bibliográfica propone múltiples posibilidades en los aspectos didácticos, que como docentes se debe abordar y posteriormente caracterizar.

4. Conclusiones y perspectivas futuras

En este análisis bibliográfico, se han consultado autores con publicaciones de artículos con temática de los conceptos sobre el infinito, límite y derivadas; se ha encontrado concepciones desde los puntos de vista epistemológico, práctico e investigativo. En este sentido, los autores coinciden que, el aprendizaje del estudiante

termina siendo el producto de las dificultades conceptuales de quienes han orientado el proceso educativo en este caso los docentes; esta reflexión teórica presenta rigor, de exigencia de conocimiento matemático hacia los docentes, en los conceptos del cálculo como el infinito, límite y derivada que se ubican en el pensamiento variacional que tienen que ver con la comprensión de las razones de cambio.

Desde una perspectiva, se trasciende el pensamiento variacional a partir de las percepciones de autores como Cabezas y Mendoza (2016) que afirman que la matemática no se comienza a aprender en la sala de clases, y que forma parte del quehacer docente conocer las preconcepciones y experiencias prematemáticas que los estudiantes traen cuando llegan a la sala de clases y esto se convierte en una necesidad didáctica. En conclusión, este análisis desarrollado pretende consolidar un proceso investigativo vinculado a conceptos del pensamiento variacional, que permite establecer las bases cognitivas para futuros procesos.

5. Lista de referencias

- Badillo Jiménez, E. R. (2004). *La Derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia: la derivada, un concepto a caballo entre la matemática y la física*. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Blanco-Álvarez, H., Fernández-Oliveras, A., & Oliveras, M. L. (2017). Formación de Profesores de Matemáticas desde la Etnomatemática: estado de desarrollo. *BOLEMA: Boletim de educação matemática*, 31, 564-589.
- Cabezas, C., & Mendoza, M. R. (2016). Manifestaciones Emergentes del Pensamiento Variacional en Estudiantes de cálculo inicial. *Formación universitaria*, 9(6), 13-26.
- Castañera, A. C. (2002). Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 5(1), 27-44.
- Contreras de la Fuente, Á., García Armenteros, M., & Font Moll, V. (2012). Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 26, 667-690.
- Crespo, C., & Lestón, P. (2009). *El infinito escolar*.
- Creswell, J. W., Hanson, W. E., Clark Plano, V. L., & Morales, A. (2007). Qualitative research designs: Selection and implementation. *The counseling psychologist*, 35(2), 236-264.

- Garelik, M., & Montenegro, F. (2018). Desarrollo histórico e implicancias en el aprendizaje del infinito: estudiar la evolución de su tratamiento para desarrollar estrategias que favorezcan su comprensión. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 53, 120-138.
- Hernández-Suarez, C. A., Prada-Núñez, R., & Ramírez-Leal, P. (2017). *Obstáculos epistemológicos sobre los conceptos de límite y continuidad en cursos de cálculo diferencial*
- Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. *Matemática Educativa. Aspectos de la investigación actual*, 91-111.
- Jiménez, E. R. (2004). *La derivada como objeto matemático y como objeto de la enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia*. Universidad de Barcelona.
- Lestón, P., & Veiga, D. C. (2004). *Introducción al infinito*.
- Millán, D. V., Fuentes, S. R., & Oktaç, A. (2022). Concepciones dinámicas y estáticas del infinito: procesos continuos y sus totalidades. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 40(1), 179-197.
- Moreno Mercado, M., Pou-Alberu, S., & Rubi Vasquez, G. E. (2012). Análisis didáctico con base en el enfoque ontosemiótico de un problema relativo a la derivada. *Revista de Nuevas Tecnologías y Sociedad*, 35-55.
- Pino-Fan, L. R., Castro, W. F., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, 34(2), 129-150.
- Pino, L., Castro, W. F., Diaz Godin, J., Font Moll, V. (2013). *Idoneidad Epistémica del significado de la derivada en el currículum de Bachillerato*. Centro de Investigaciones Educativas Paradigma.
- Valls, J., Pons, J., & Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la Comprensión del límite de una función. *Enseñanza de Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 29(3), 325-338.
- Vázquez, M., S., Astudillo, T., & López, E. (1999). Evolución histórica del concepto de "límite funcional" en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las ciencias: Revista de Investigación y experiencias didácticas*, 463-476.

Vergel Ortega, M., Rincón, O. L., & Zafra Tristancho, S. L. (2018). Influencia de curso precálculo en ecuaciones diferenciales y desarrollo de pensamiento variacional. *Boletín Redipe*, 102-120.

Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A., & Müller, D. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Premisa*, 29, 9-19.