



## MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS PARA LA TORSIÓN DE SAINT VENANT.

## FINITE DIFFERENCE METHOD FOR SAINT VENANT'S TORSION.

Fabrizio Miguel Vergara Diaz  
Departamento de matemática y estadística,  
Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, Perú.  
vergara@unsaac.edu.pe  
ORCID: 0000-0002-9836-6435

### Resumen

En el artículo se presenta la formulación del problema de Saint Venant con su respectiva solución analítica y numérica. El problema fue resuelto a través de la función de tensión de Prandtl planteada en Timochenko y la solución numérica a través del método de diferencias finitas.

**Palabras clave:** Torsión de Saint Venant, Solución Analítica, Solución Numérica, Tensión, Función de Prandtl, Diferencia Finita.

### Abstract

In this paper we will present the formulation of the problem of Saint Venant with its respective analytical and numerical solution. The problem was solved analytically through the stress function of Prandtl and the solution of Timoshenko and numerically through the method of finite differences.

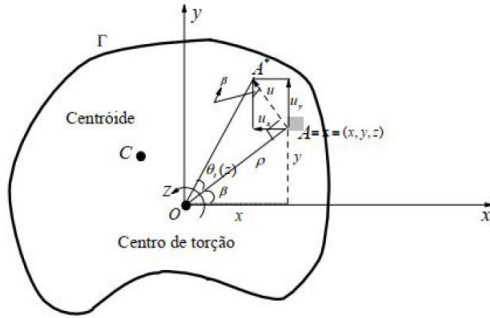
**Keywords:** Torsion of Saint Venant, Analytical solution, Numerical Solution, stress, Function of Prandtl, finite difference.

### Introducción

Dada una sección circular, cuando esta se somete a torsión esta no presenta alabeo, lo que ocurre cuando la sección es otro tipo de sección circular, la torsión descrita por una ecuación diferencial parcial (Laplace), se introduce la función de tensión de Prandtl o función de alabeo para poder modelar el fenómeno en estudio.

Timochenko plantea una solución analítica en un punto con valor 0.12, El método de diferencias finitas es utilizado para obtener una solución numérica aproximada mediante la discretización del dominio con un número de puntos  $n=40$ , obteniendo un valor de 0.123. Dada una sección arbitraria como se muestra en la figura 1.





**Figura 1.** Diagrama de desplazamientos en la sección de un cuerpo arbitrario.

Las deformaciones de la sección en estudio están dadas por

$$\begin{aligned} u_x &= -\theta'_t z y \\ u_y &= -\theta'_t z x \\ u_z &= -\theta'_t \psi(x, y) \end{aligned}$$

Donde la función de alabeo es  $\psi(x, y)$ , la torsión  $\theta'_t$  y  $u_x, u_y, u_z$ . Estas deformaciones pueden ser relacionadas con las componentes de tensión:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = -\theta'_t y + \theta'_t \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = -\theta'_t x + \theta'_t \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{aligned}$$

Aplicando la Ley de Hooke en las ecuaciones anteriores, se obtiene las componentes de tensión:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} &= G\theta'_t \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{yz} &= G\theta'_t \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \end{aligned}$$

Concluyendo que gracias a la torsión solo se producen fuerzas cortantes. Aplicando la ecuación de equilibrio se obtiene que el laplaciano de  $\psi$  es nulo, esto es:

$$\nabla^2 \psi = 0$$

Entonces:

$$\nabla^2 \psi = 0$$

Note que las fuerzas cortantes son tangentes a la sección transversal del sólido en estudio, por lo que se tiene:

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0$$

Denotando al contorno de la sección transversal por  $\Gamma$ :

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \frac{\partial y}{\partial \Gamma} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \frac{\partial x}{\partial \Gamma} = 0$$

A través de la función de Prandtl se realiza un cambio de variable de la forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \tau_{yz} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\tau_{xz}$$

Por lo que se obtiene

$$\nabla^2 \phi = -2G\theta'_t$$

Que es la ecuación principal a resolver, ahora se introduce las condiciones de contorno en  $\Gamma$ , entonces se obtiene:





$$\frac{\partial \phi}{\partial \Gamma} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \Gamma} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \Gamma}$$

Con lo cual la derivada de la función  $\phi$  como función de  $\Gamma$  es nula, esto se puede expresar:

$$\phi = 0 \text{ en } \Gamma$$

Además, el torque es calculado por:

$$M_t = \int_A [x\tau_{yz} - y\tau_{xz}] dA$$

Finalmente, aplicando las relaciones de Prandtl y que  $\phi = 0$  en  $\Gamma$ , se obtiene la ecuación que describe el problema de este trabajo:

$$M_t = \int_A \phi dA$$

Es importante notar que la ecuación diferencial con sus condiciones iniciales para resolver es:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= -2G\theta'_t \\ \phi &= 0 \text{ en } \Gamma \end{aligned}$$

### Metodología

El método de diferencia finita para la ecuación diferencial parcial consiste en discretizar las derivadas parciales mediante la serie de Taylor de una función, de esta forma la primera y segunda derivada de la función pueden ser aproximadas mediante:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\phi_{i-1,j} - \phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j}}{dx^2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\phi_{i,j-1} - \phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j}}{dy^2}$$

Aplicando a la ecuación

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= -2G\theta'_t \\ \phi &= 0 \text{ en } \Gamma \end{aligned}$$

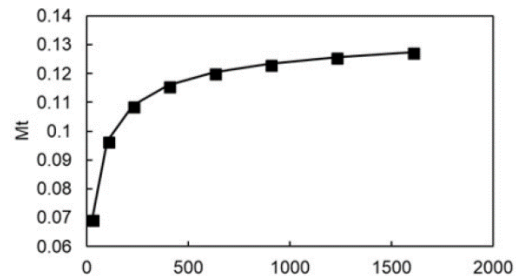
Se obtiene un sistema de ecuaciones como se muestra:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} = -2G\theta'_t$$

Para la aplicación se considera una sección particular rectangular de ancho  $b$  y altura  $h$ , las cuales se toman como condiciones unitarias  $b = h = 1, G = 1$  y  $\theta'_t = 1$ , además se utiliza el software Octave para el cálculo de la solución para  $N=40$ .

### Resultados

la solución presentada para diferente número de nodos utilizando el código para la solución del problema está dada en la siguiente figura.



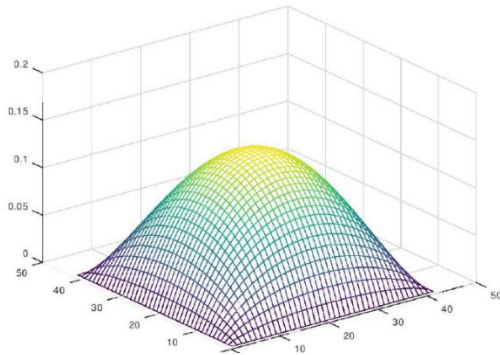
**Figura.2** Momento que depende del número de nodos.

En la figura 2 se observa como al aumentar el número de nodos la aproximación es cercana a 0.12 que es la solución analítica.





Se obtiene también gracias al software utilizado el gráfico del momento mostrado a continuación.



**Figura.3** Perfil de  $\phi$  encontrado para  $N = 40$ ,  $G = 1$  y  $\theta'_t = 1$

### Discusión

Este es un trabajo realizado para observar la potencia de los métodos numéricos que hoy nos ayudan a resolver problemas que muchas veces no tienen solución analítica, por tal motivo este trabajo se puede aplicar a diferentes tipos de materiales como concreto, arcilla, acero, siendo un trabajo de aplicación, además no solo se puede aplicar a la geotecnia o a las estructuras sino que como es una teoría general para la torsión sabemos que los métodos numéricos son utilizados para diferentes áreas de aplicación no solo para la mecánica de materiales o mecánica de fluidos sino también para biomedicina.

### Conclusiones

Desde el punto de vista matemático es importante resaltar la convergencia de la solución, por lo cual se puede realizar un estudio de convergencia, clásico en la matemática aplicada, más concretamente en

los métodos numéricos. Además, es importante tener en cuenta que se puede hacer el mismo estudio utilizando métodos más óptimos como el Método de elemento finito, esto para poder aplicarlo a una sección irregular donde se observa todo el potencial de este método, en este caso como la sección es rectangular y se toma consideraciones generales pues se puede trabajar con diferencia finita.

### Referencias bibliográficas

- Hillesheim, m. j.; Araujo. (2013) *f. c. de. analise de torcao de saint-venant em barras com secao arbitraria via metodo dos elementos de contorno* (m.e.c.).dissertacao(mestrado). Universidade Federal de Ouro Preto.
- Patankar.S,(1980). *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. 1. ed. New-York: CRC Press.
- Timoshenko,s. Goodier, J,(1951).*Theory of Elasticity*. 2. ed. New York-Toronto-London,McGraw-Hillbook Company.

