



# Funciones hiperbólicas básicas: construcción geométrica y analítica de sus definiciones desde la hipérbola unitaria fundamental

Basic hyperbolic functions: geometric and analytical  
construction of their definitions from the fundamental  
unit hyperbola

**Walter Antonio Rodríguez Mercado**

Licenciado en Ciencias de la Educación  
con mención en Matemática

<https://orcid.org/0009-0003-0461-2186>

[walterrodriguez@gmail.com](mailto:walterrodriguez@gmail.com)

**Mercedes Leonor López Almendárez**

Máster en Matemática Aplicada

<https://orcid.org/0000-0002-2575-3258>

[leolopez16@outlook.com](mailto:leolopez16@outlook.com)

---

Enviado el 15 de diciembre, 2025 / Aceptado el 05 de mayo, 2026

<https://doi.org/10.5377/rtu.v15i42.23001>

**Palabras Clave:** Funciones hiperbólicas, función exponencial natural, hipérbola unitaria, método por integración.

**Keywords:** Hyperbolic functions, natural exponential function, unit hyperbola, integration method.

## RESUMEN

**E**l artículo se centra en el estudio de las funciones trigonométricas hiperbólicas principales o básicas, con el propósito de ofrecer una comprensión rigurosa que integre los enfoques geométrico y analítico. El objetivo fundamental consiste en desarrollar una construcción formal de dichas funciones a partir de la hipérbola unitaria, estableciendo definiciones precisas y demostrando sus leyes de asignación en términos de la función exponencial natural. Para ello, se introduce inicialmente una interpretación geométrica mediante la construcción de segmentos denominados líneas hiperbólicas, las cuales surgen de la relación directa con la hipérbola unitaria y reciben los nombres de seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólica. Posteriormente, se lleva a cabo un estudio matemático estructurado que integra herramientas como parametrizaciones, métodos de integración y razonamientos analíticos, permitiendo demostrar que estas líneas hiperbólicas representan funciones bien definidas. Este proceso no solo consolida el vínculo entre la geometría y el análisis, sino que también aporta una formalización coherente que fortalece el rigor teórico del tratamiento de las funciones hiperbólicas. El trabajo ofrece un aporte significativo tanto desde el punto de vista matemático como didáctico, al proponer una visión integradora y progresiva que resulta beneficiosa para estudiantes, docentes e investigadores interesados en el análisis matemático. En conclusión, aunque las funciones hiperbólicas principales suelen presentarse en la literatura de manera predominantemente analítica, expresadas en términos de la función exponencial, estas poseen un origen geométrico fundamental. También abre nuevas posibilidades para su aplicación didáctica y para el desarrollo de futuras investigaciones en el campo del análisis matemático.

## ABSTRACT

**T**his article focuses on the study of the principal or basic hyperbolic trigonometric functions, aiming to provide a rigorous understanding that integrates geometric and analytical approaches. The fundamental objective is to develop a formal

construction of these functions based on the unit hyperbola, establishing precise definitions and demonstrating their assignment laws in terms of the natural exponential function. To this end, a geometric interpretation is initially introduced through the construction of segments called hyperbolic lines, which arise from the direct relationship with the unit hyperbola and are named hyperbolic sine, hyperbolic cosine, and hyperbolic tangent. Subsequently, a structured mathematical study is carried out, integrating tools such as parametrizations, integration methods, and analytical reasoning, demonstrating that these hyperbolic lines represent well-defined functions. This process not only consolidates the link between geometry and analysis but also provides a coherent formalization that strengthens the theoretical rigor of the treatment of hyperbolic functions. This work offers a significant contribution from both a mathematical and pedagogical perspective, proposing an integrative and progressive approach that benefits students, teachers, and researchers interested in mathematical analysis. In conclusion, although the principal hyperbolic functions are usually presented in the literature in a predominantly analytical manner, expressed in terms of the exponential function, they have a fundamental geometric origin. It also opens new possibilities for their didactic application and for the development of future research in the field of mathematical analysis.

## INTRODUCCIÓN

Las funciones hiperbólicas son funciones especiales que desempeñan un papel esencial en el análisis, la geometría y numerosas aplicaciones en la física, ingeniería, arquitectura, tales como: el transporte eléctrico, construcción de súper estructuras, para determinar los recubrimientos de superficie ideales para las aeronaves, en criptografía basada en sistemas de curvas elípticas-hiperboloides, para dibujar arcos de bóvedas, pronosticar algún fenómeno natural, fenómenos de crecimiento exponencial, la propagación de ondas, geometría no euclidiana . Por tales razones podemos llegar a pensar como estas son de gran ayuda para explicar fenómenos naturales y antrópicos, de tal forma que permita a la humanidad un desarrollo científico, en la creación de modelos y estructuras eficientes. (López, Ruíz, & Velásquez, 2019):

En las literaturas de Leithold(1998), Swokowski(1998) y Larson, Kemmer(2006), entre otros, los autores introducen estas funciones desde un punto de vista analítico, definiéndolas en término de la función exponencial, dejando en segundo plano el origen geométrico, omitiendo así una comprensión más profunda de su naturaleza de las funciones hiperbólicas, a pesar de la importancia de estas en la aplicación de soluciones de situaciones del entorno. En este contexto, con lo anteriormente expuesto surgen la siguiente cuestión ¿Cómo puede desarrollarse una construcción geométrica y analítica de las funciones hiperbólicas básicas, partiendo de la hipérbola unitaria, que permita una definición precisa y que demuestre su expresión funcional en términos de la función exponencial natural?

Responder a esta pregunta implica una interpretación geométrica y analítica de la hipérbola, seguido definir las líneas hiperbólicas como una construcción geométrica de dicha curva y se concluya con su definición analítica mediante fundamentaciones matemática, además que estas construcciones corresponden a funciones expresables en función de la exponencial natural, lo que permite formalizar su definición.

## MATERIALES Y MÉTODOS

La metodología empleada en el presente artículo científico, se basó en un enfoque teórico-analítico de tipo documental, ya que se basó en revisiones de fuentes bibliográfica especializadas en el estudio de las funciones hiperbólicas, así como sus definiciones, características y propiedades. Tomando como referencia principal el libro titulado FUNCIONES HIPERBOLICAS: Lecciones populares de matemática de V. 6. Shervátov (1975), definió geoméricamente las líneas hiperbólicas como segmentos basados en la gráfica de la hipérbola unitaria, además realiza una analogía de su construcción paralelamente a las funciones circulares

Luego se consultó el libro titulado: FUNCIONES HIPERBOLICAS: FASCÍCULOS DE MATEMÁTICAS de Pablo García y Colomé (2010). Esta fuente permitió comprender la relación geométrica de las funciones hiperbólicas con su expresión analítica, ya que define el área del sector hiperbólico, a partir de esta se deducen la expresión analítica, a través de demostraciones matemática.

Esto fue un punto de partida para realizar distintas demostraciones en un orden progresivo y adoptando un enfoque didáctico que permitió organizar y estructurar las

definiciones, logrando así un estudio formal y ordenada desde el origen geométrico hasta su expresión analítica quedando determinada por la función exponencial.

## La hipérbola

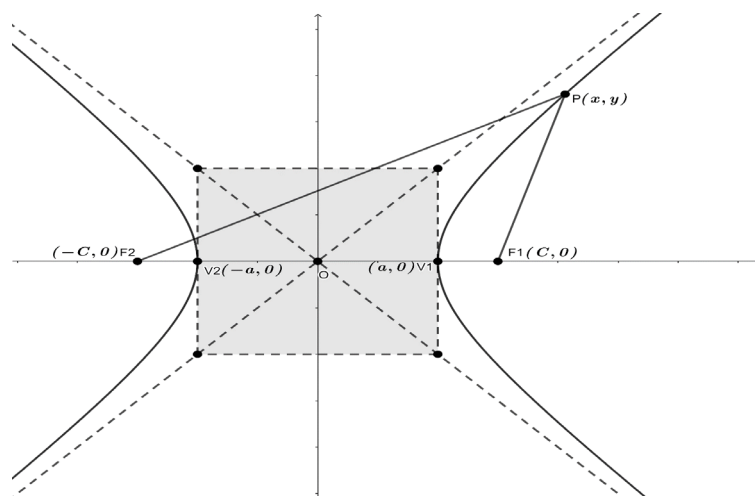
### Definición de la hipérbola.

Se inicia con la definición de hipérbola, para una mejor comprensión del lector y así se tenga un sentido lógico de la construcción de las funciones hiperbólicas a partir de la hipérbola unitaria. Según (Stewart, Redlin, & Watson, 2012) define que “Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos del plano, cuya diferencia de distancias desde dos puntos fijos  $F_1$  y  $F_2$  y es una constante. Estos dos puntos fijos son los focos de la hipérbola”

Sean los focos  $F_1(c,0)$  y  $F_2(-c,0)$  y una constante  $2a$ , con un punto  $P(x,y)$  que representa un punto en la hipérbola.

**Figura 1**

*Gráfica de la hipérbola*



Nota. La ilustración muestra la representación gráfica de la hipérbola en plano cartesiano, así como sus elementos fundamentales. Elaborado desde Geogebra

### Demostración de la ecuación de la hipérbola.

“La distancia  $d(P_1, P_2)$  entre cualesquiera dos puntos  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$  y en un plano coordenado es  $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ” (Swokowski, 2009, p. 134). Observe la figura 1, calculando la distancia del punto  $P$  al punto fijo  $F_1$  y del punto  $P$  al punto fijo  $F_2$ , se tiene que:

$$d(P, F_1) = \sqrt{(c - x)^2 + y^2}$$

$$d(P, F_2) = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

Ahora se hace la diferencia entre ambas distancias, tal como sigue:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \sqrt{(c - x)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \quad (i)$$

Luego, según el gráfico 1, si el punto  $P$  se mueve sobre la gráfica de la parábola derecha de la hipérbola hasta que coincida con el punto  $V_1$ , el segmento diferencia con medida  $d(P, F_1) - d(P, F_2)$  queda superpuesto al segmento  $F_1F_2$ , siendo el segmento diferencia:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = F_2V_1 - V_1F_1 = (F_2V_2 + V_2V_1) - V_1F_1 = F_2V_2 + V_2V_1 - V_1F_1$$

Pero recuérdese que  $F_2V_2 = V_1F_1$ , además calculando la distancia  $V_2V_1$  se tiene:

$$V_2V_1 = d(v_2, v_1) = \sqrt{(a - (-a))^2 + (0 - 0)^2} = \pm\sqrt{(a + a)^2} = \pm\sqrt{(2a)^2} = \pm 2a$$

Por lo tanto, se puede decir que:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a \quad (ii)$$

Por i e ii, se tiene:

$$\sqrt{(c - x)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Ahora realizando operaciones del algebra elemental, pasando la raíz opuesta al lado derecho de la igualdad

$$\sqrt{(c - x)^2 + y^2} = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} \pm 2a$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad se tiene:

$$(\sqrt{c^2 - 2cx + x^2 + y^2})^2 = (\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} \pm 2a)^2$$

Se elimina el radical del lado izquierdo de la igualdad y se desarrollando el cuadrado del binomio de lado derecho.

$$c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2})^2 \pm 2(\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2})(2a) + (2a)^2$$

$$c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} + 4a^2$$

Se cancela en cada miembro de la igualdad los términos iguales y se trasponen términos convenientemente:

$$\pm 4a\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

Se divide entre  $4a$  ambos miembros de la igualdad, se simplifican términos semejantes:

$$\frac{\pm 4a\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2}}{4a} = \frac{4a^2 + 4cx}{4a}$$

$$\frac{\pm 4a\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2}}{4a} = \frac{4a^2}{4a} + \frac{4cx}{4a}$$

$$\pm\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} = a + \frac{cx}{a}$$

Para suprimir de la expresión el radical se eleva al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$\left(\pm\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2}\right)^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2$$

Calculando el cuadrado del radical del lado izquierdo de la igualdad y desarrollando cuadrado del binomio del lado derecho de la igualdad se tiene que:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2(a)\left(\frac{cx}{a}\right) + \left(\frac{cx}{a}\right)^2$$

Luego se transponen términos en la igualdad, se simplifican términos semejantes y se conmutan términos de forma conveniente:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}$$

$$x^2 + y^2 + c^2 - a^2 = \frac{c^2x^2}{a^2}$$

$$c^2 - a^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - x^2 - y^2$$

Se agrupan términos semejantes y se aplica la propiedad distributiva

$$c^2 - a^2 = \left( \frac{c^2}{a^2}x^2 - x^2 \right) - y^2$$

$$c^2 - a^2 = \left( \frac{c^2}{a^2} - 1 \right) x^2 - y^2$$

$$c^2 - a^2 = \frac{c^2 - a^2}{a^2} x^2 - y^2$$

Dividir cada miembro por  $c^2 - a^2$

$$\frac{c^2 - a^2}{c^2 - a^2} = \left( \frac{\frac{c^2 - a^2}{a^2}}{c^2 - a^2} \right) x^2 - \frac{y^2}{c^2 - a^2}$$

$$1 = \left( \frac{1}{a^2} \right) x^2 - \frac{y^2}{c^2 - a^2}$$

$$1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2}$$

Ahora en el triángulo  $F_1PF_2$  (Figura 1) se cumple que: “En cualquier triángulo, la suma de las longitudes de dos de los lados es mayor que la longitud del tercer lado” (Escuela Politécnica Nacional, 2024). Entonces:

$$\overline{PF_2} < \overline{PF_1} + \overline{F_1F_2}$$

$$|\overline{PF_2} - \overline{PF_1}| < \overline{F_1F_2}$$

Por figura 1, se tiene que  $|\overline{PF_2} - \overline{PF_1}| = |\pm 2a| = 2a$  y  $\overline{F_1F_2} = 2c$ , por lo cual,  $2a < 2c$  es decir que  $a < c$ , entonces  $0 < c^2 - a^2$ . Como  $c^2 - a^2$  es positivo, podemos decir que  $b^2 = c^2 - a^2$ . Luego:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Quedando demostrada la ecuación canónica de la hipérbola. Ecuación que será fundamental en la definición de las líneas hiperbólicas.

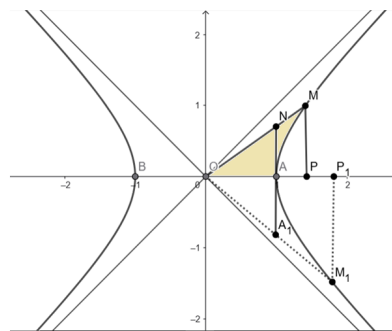
### Definición de las líneas hiperbólicas: Seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólica

A continuación, se definirán las líneas hiperbólicas a partir de una hipérbola unitaria, que más adelante se redefinirán como funciones hiperbólicas, siguiendo los mismos pasos para la construcción de la trigonometría del círculo. Las funciones trigonométricas circulares se definieron en relación con la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  y de ahí su nombre. De manera semejante, las funciones hiperbólicas se definirán a partir de la hipérbola unitaria  $x^2 - y^2 = 1$  (Colomé, 2010, p. 2).

Ahora, se procede a exponer la teoría de las líneas hiperbólicas. Obsérvese una hipérbola unidad (figura 2)  $x^2 - y^2 = 1$

**Figura 2**

*Gráfica de la hipérbola unitaria*



*Nota. El esquema presenta la gráfica de una hipérbola unitaria y la región o sector hiperbólico*

Se llama ángulo hiperbólico  $\alpha$  formados por dos radios  $\overline{OA}$  y  $\overline{OM}$ , de la hipérbola al número igual al doble del área del sector, limitado por estos radios y el arco de la hipérbola. Se traza una perpendicular  $MP$  del punto  $M$  de la hipérbola al diámetro  $OA$  que es el eje de simetría de la hipérbola que corta a ésta en el vértice  $A$ ; trace una tangente a la hipérbola en el punto  $A$ , procurando que la tangente corte el diámetro  $OM$  en el punto  $N$ . El segmento  $MP$  de la perpendicular se llama línea del seno hiperbólico, el segmento  $OP$  del diámetro se llama línea del coseno hiperbólico y el segmento  $AN$  línea de la tangente hiperbólica.

Las longitudes de los segmentos  $MP$ ,  $OP$  y  $AN$  se llaman, respectivamente, seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólica del ángulo hiperbólico  $\alpha$ , y se denotan:  $PM = Sh \alpha$ ,  $OP = ch \alpha$   $AN = Th \alpha$

La principal propiedad del ángulo  $\alpha$  consiste en la invariabilidad de su valor al girar el sector  $AOM$  alrededor de  $O$ . Análogamente el ángulo hiperbólico  $\alpha$  no varia su valor en el giro hiperbólico de la figura  $AOM$ . Sin embargo, en los tiempos modernos la notación ha variado ligeramente por la era tecnológica, ya que muchos paquetes matemáticos, aplicaciones y calculadoras presentan su simbología de la siguiente forma:

$$\sinh a ; \cosh a ; \tanh a$$

## Demostración de las líneas hiperbólicas

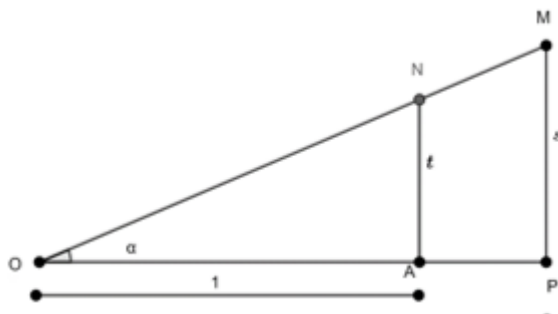
### Seno hiperbólico

En los párrafos anteriores se estableció de forma geométrica las líneas hiperbólicas a partir de la hipérbola, sin embargo, acá se hará la demostración de la ley de asignación de las líneas hiperbólicas auxiliándose de la Figura 2, tal como lo explica (Clayton, 2024) a continuación:

Obsérvese en la Figura 2 el triángulo  $\triangle AON$ , se muestra a detalle en la figura 3.

Figura 3

*Grafica del triángulo OMP*



Nota. La gráfica muestra las líneas hiperbólicas en el triángulo OMP de la figura 2.

Se obtienen triángulos semejantes, según (Moise y Downs, 1986, p. 327) “Si los triángulos son semejantes, los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales”, así que se puede establecer las siguientes relaciones:

$$\frac{t}{1} = \frac{s}{c} \rightarrow t = \frac{s}{c}$$

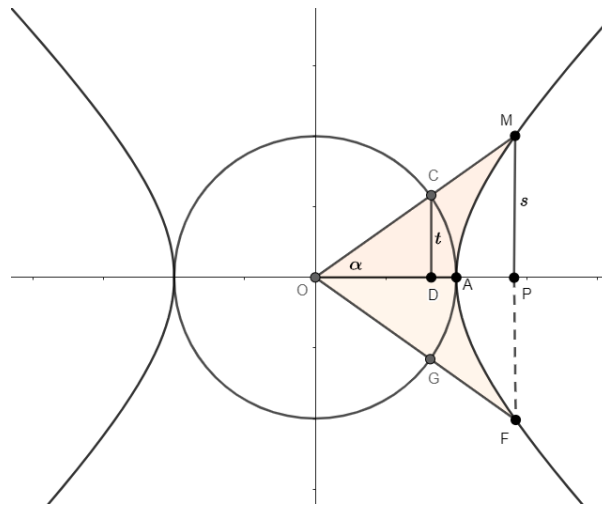
Ahora en la fórmula de la hipérbola unitaria evalúese el punto  $M(c,s)$ , obteniendo así:

$$x^2 - y^2 = 1 \rightarrow c^2 - s^2 = 1$$

Obsérvese la circunferencia delimitada por los dos vértices de la hipérbola equilátera que tiene por radio 1, como se muestra en la figura 4.

**Figura 4**

*Grafica de la hipérbola*



Nota. La grafica muestra la región hiperbólica o sector hiperbólico.

En la circunferencia de centro  $O$ , nótese el triángulo  $ODC$  rectángulo en  $D$ , se tiene que  $\sin \alpha = \frac{CD}{CO}$ , como la circunferencia es de radio 1, se dice que  $OA=CO=1$ , se tiene que  $\sin \alpha = CD$ , queda establecido que el segmento  $CD$  representa el  $\sin \alpha$ . Se puede tomar como argumento de función circular un valor  $x$ , que corresponde al área del sector circular formado por el ángulo  $GOC = 2 \alpha$ , se tiene que el área del sector circular está dada por:

$$\text{Área} = x = \frac{1}{2} r^2 (2 \alpha), \text{ como } CO = r = 1$$

se tiene que  $\text{Área} = x = \alpha$

La demostración se obtiene hallando el área de la parte sombreada delimitada por el ángulo  $2\alpha$  y la hipérbola equilátera  $x^2 - y^2 = 1$  (Colomé, 2010, p. 6). Nótese que el área de la parte sombreada será igual al área del triángulo, menos el área bajo la curva de la hipérbola equilátera en el intervalo  $[1, c]$ . (ver Figura 4)

El área del triángulo  $FOM$  es el doble de  $POM$ , calculando el

$$\text{Área} = 2 \left( \frac{b \cdot h}{2} \right) = 2 \left( \frac{c \cdot s}{2} \right) = cs$$

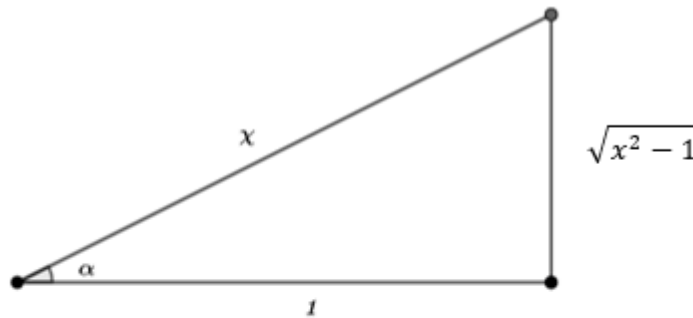
Si se despeja la ecuación de la hipérbola equilátera  $x^2 - y^2 = 1$  se tiene que  $y = \sqrt{x^2 - 1}$ , reemplazamos  $MP = s$ ;  $OP = c$ ;  $AN = t$ . El área sombreada está dada por:

$$\text{Área} = x = sc - 2 \int_1^c \sqrt{x^2 - 1} dx \quad (1)$$

Resolviendo la integral por el método de sustitución trigonométrica:

$$2 \int_1^c \sqrt{x^2 - 1} dx \quad (2)$$

comparar con el triángulo rectángulo y aplicar razones trigonométricas tal como se muestra a continuación:



$$\sec \alpha = \frac{x}{1} = x \rightarrow x = \sec \alpha \rightarrow dx = \sec \alpha \tan \alpha d\alpha \quad (3)$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{1} = \sqrt{x^2 - 1} \rightarrow \tan \alpha = \sqrt{x^2 - 1} \quad (4)$$

Sustituyendo en la integral:

$$\begin{aligned} & 2 \int_1^c \tan \alpha \sec \alpha \tan \alpha d\alpha \\ &= 2 \int_1^c \tan^2 \alpha \sec \alpha d\alpha = 2 \int_1^c \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} d\alpha = 2 \int_1^c \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^3 \alpha} d\alpha \\ &= 2 \int_1^c \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^3 \alpha} d\alpha = 2 \int_1^c \left( \frac{1}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^3 \alpha} \right) d\alpha = 2 \int_1^c (\sec^3 \alpha - \sec \alpha) d\alpha \\ &= 2 \left[ \int_1^c \sec^3 \alpha - \int_1^c \sec \alpha \right] = 2 \left[ \int_1^c \sec^3 \alpha - [\ln|\sec \alpha + \tan \alpha|] \right]_1^c \quad (5) \end{aligned}$$

La integral de la  $\sec \alpha$  se calcula de forma directa, sin embargo, la integral de  $\sec^3 \alpha$  integrará usando la técnica de integración por parte.

$$\int_1^c \sec^3 \alpha \, d\alpha$$

$$= \int_1^c \sec \alpha \cdot \sec^2 \alpha; u = \sec \alpha \rightarrow du = \sec \alpha \tan \alpha \, d\alpha; dv = \sec^2 \alpha \rightarrow v = \tan \alpha$$

$$= \sec \alpha \tan \alpha - \int_1^c \tan \alpha \sec \alpha \tan \alpha \, d\alpha = \sec \alpha \tan \alpha - \int_1^c \tan^2 \alpha \sec \alpha$$

$$= \sec \alpha \tan \alpha - \int_1^c \sec \alpha (\sec^2 \alpha - 1) = \sec \alpha \tan \alpha - \int_1^c (\sec^3 \alpha - \sec \alpha) \, d\alpha$$

$$= \sec \alpha \tan \alpha - \left[ \int_1^c \sec^3 \alpha - \int_1^c \sec \alpha = \sec \alpha \tan \alpha - \int_1^c \sec^3 \alpha \, d\alpha + [\ln|\sec \alpha + \tan \alpha|]_1^c \right]$$

Ahora se compara:

$$\int_1^c \sec^3 \alpha \, d\alpha = \sec \tan \alpha - \int_1^c \sec^3 \alpha \, d\alpha + \ln|\sec \alpha + \tan \alpha|$$

$$\int_1^c \sec^3 \alpha \, d\alpha + \int_1^c \sec^3 \alpha = \sec \tan \alpha + \ln|\sec \alpha + \tan \alpha|$$

$$2 \int_1^c \sec^3 \alpha = \sec \tan \alpha + \ln|\sec \alpha + \tan \alpha|$$

$$\int_1^c \sec^3 \alpha = \frac{\sec \tan \alpha + \ln|\sec \alpha + \tan \alpha|}{2} \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (5)

$$2 \left[ \int_1^c \sec^3 \alpha - \ln|\sec \alpha + \tan \alpha| \right]$$

$$= 2 \left[ \frac{\sec \tan \alpha + \ln|\sec \alpha + \tan \alpha|}{2} - \ln|\sec \alpha + \tan \alpha| \right]_1^c$$

$$= \left[ 2 \cdot \frac{\sec \tan \alpha + \ln|\sec \alpha + \tan \alpha|}{2} - 2\ln|\sec \alpha + \tan \alpha| \right]_1^c$$

$$= [\sec \tan \alpha + \ln|\sec \alpha + \tan \alpha| - 2\ln|\sec \alpha + \tan \alpha|]_1^c = [\sec \alpha \tan \alpha - \ln|\sec \alpha + \tan \alpha|]_1^c \quad (7)$$

Sustituyendo (3) y (4) en (7)

$$x\sqrt{x^2 - 1} - \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|$$

Evaluando los límites de integración.

$$= c\sqrt{c^2 - 1} - \ln|c + \sqrt{c^2 - 1}| \quad (8)$$

Sustituyendo (8) en (1)

$$\begin{aligned} \text{Área} = x = sc - 2 \int_1^c \sqrt{x^2 - 1} dx &= sc - \left[ c\sqrt{c^2 - 1} - \ln|c + \sqrt{c^2 - 1}| \right] \\ &= sc - c\sqrt{c^2 - 1} + \ln|c + \sqrt{c^2 - 1}| \end{aligned}$$

Como  $c^2 - s^2 = 1 \rightarrow s = \sqrt{c^2 - 1}$ , demás  $c = \sqrt{s^2 + 1}$ , de lo cual resulta:

$$sc - sc + \ln|\sqrt{s^2 + 1} + s| = \ln|\sqrt{s^2 + 1} + s|$$

Como  $c^2 - s^2 = 1 \rightarrow s = \sqrt{c^2 - 1}$ , demás  $c = \sqrt{s^2 + 1}$ , de lo cual resulta:

$$sc - sc + \ln|\sqrt{s^2 + 1} + s| = \ln|\sqrt{s^2 + 1} + s|$$

Se puede afirmar que se ha hallado el área de la parte sombreada delimitada por un ángulo  $2a$  y la hipérbola equilátera  $x^2 - y^2 = 1$ .

$$x = \ln|\sqrt{s^2 + 1} + s|$$

Por ser  $s > 0$  y propiedad de logaritmo natural (Swokowski, 2009, p. 362), se tiene que:

$$e^x = e^{\ln|\sqrt{s^2 + 1} + s|} \rightarrow e^x = \sqrt{s^2 + 1} + s \rightarrow e^x - s = \sqrt{s^2 + 1}$$

$$(e^x - s)^2 = (\sqrt{s^2 + 1})^2 \rightarrow e^{2x} - 2se^x + s^2 = s^2 + 1 \rightarrow e^{2x} - 2se^x = 1$$

$$2se^x = e^{2x} - 1 \rightarrow \frac{2se^x}{2e^x} = \frac{e^x \cdot e^x}{2e^x} - \frac{1}{2e^x} \rightarrow s = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$$

$$s = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

El segmento  $PM$  (Figura 2) representa el seno hiperbólico, denotado  $\sinh a$  y  $\alpha = x$ . Por lo tanto, queda demostrado que:

$$\sinh \alpha = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$$

### Coseno Hiperbólico

El segmento  $OP$  representa el coseno hiperbólico (ver figura 2), además se dijo que la demostración del seno hiperbólico, se obtiene hallando el área de la parte sombreada delimitada por un ángulo  $2a$  y la hipérbola equilátera  $x^2 - y^2 = 1$ , análogamente se demostrará la línea coseno hiperbólico, pues el segmento  $OP$  del diámetro representa la línea del coseno hiperbólico. Luego el área sombreada está dada en (1):

$$\text{Área} = x = sc - 2 \int_1^c \sqrt{x^2 - 1} dx$$

En la demostración del seno hiperbólico se llegó que el área delimitada por el ángulo hiperbólico y la hipérbola está dada por:

$$\text{Área} = sc - c\sqrt{c^2 - 1} + \ln |c + \sqrt{c^2 - 1}|$$

Como  $C^2 - S^2 = 1 \rightarrow s = \sqrt{c^2 - 1}$ , resulta:

$$\text{Área} = sc - sc + \ln |c + \sqrt{c^2 - 1}| = \ln |c + \sqrt{c^2 - 1}| = x$$

$$x = \ln |c + \sqrt{c^2 - 1}|$$

Por ser  $c > 0$  (medida del segmento  $OP$ ) y propiedad de logaritmo natural (Swokowski, 2009, p. 362), se tiene que:

$$e^x = e^{\ln|c + \sqrt{c^2 - 1}|} \rightarrow e^x = c + \sqrt{c^2 - 1} \rightarrow e^x - c = \sqrt{c^2 - 1}$$

$$(e^x - c)^2 = (\sqrt{c^2 - 1})^2 \rightarrow e^{2x} - 2ce^x + c^2 = c^2 - 1 \rightarrow e^{2x} - 2ce^x = -1$$

$$2ce^x = e^{2x} + 1 \rightarrow \frac{2ce^x}{2e^x} = \frac{e^x \cdot e^x}{2e^x} + \frac{1}{2e^x} \rightarrow c = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$$

$$c = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Recuérdese que en 8.2 se dijo que el segmento  $OP$  (Figura 2) representa el coseno hiperbólico, denotado  $\cosh a$  y  $a = x$ . sustituyendo, queda demostrado que:

$$\cosh \alpha = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

### Tangente Hiperbólico

Ya está más que claro, que la demostración de las tres líneas hiperbólicas se resuelve con la región sombreada (ver figura 4). El segmento  $AN$  representa la línea de la tangente hiperbólica. Pero en la figura 3 se derivó una relación que cobra sentido en esta demostración (ver Figura 3):

$$\frac{t}{1} = \frac{s}{c} \quad \rightarrow \quad t = \frac{s}{c}$$

Ya se determinaron los valores de  $s$  y  $c$ , sustituyendo dichos valores se tiene:

$$t = \frac{s}{c} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Se encontró el valor de  $t$  que es la medida del segmento  $AN$  que representa la tangente hiperbólica, quedando determinada por:

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Quedando definida las tres líneas hiperbólicas directas o básicas en función de la función exponencial natural.

### RESULTADOS

El presente artículo científico, permitió a través de un enfoque geométrico y analítico, la construcción de la definición de las funciones hiperbólicas principales o básicas, sobre la hipérbola unitaria. Se demostró que las funciones seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólica están definida en función de la función exponencial natural:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Como consecuencia de la construcción algebraica se obtuvo la siguiente identidad, para cualquier punto P (x,y), definido por la ecuación  $x^2 - y^2 = 1$ , entendiéndose que las componentes de las coordenadas, obedecen a  $\cosh x$  y  $\sinh x$ , respectivamente, se tiene que:

$$x^2 - y^2 = (\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \rightarrow \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Siendo esta “una de las identidades fundamentales que satisface las funciones hiperbólicas” (Leithold, 1998, p. 491).

## CONCLUSIÓN

En este trabajo científico se logró establecer una construcción geométrica y analítica de las tres definiciones de las funciones hiperbólicas principales, sobre la hipérbola unitaria de forma clara y coherente. El enfoque geométrico proporciona una idea más intuitiva del área hiperbólica y una relación analítica fundamentada en razonamientos matemáticos, con las funciones hiperbólicas principales. Se desprende de este razonamiento la identidad fundamental de las funciones hiperbólicas como un resultado natural de la geometría hiperbólica,

En resumen, se concluye que, aunque las funciones hiperbólicas principales sean presentadas en literaturas relacionadas a su estudio meramente de forma analítica en término de la función exponencial, estas poseen un origen geométrico, el cual contribuye a entendimiento de su forma estructural. Esta doble perspectiva abre camino para futuras aplicaciones didácticas y teoría en el estudio de análisis matemático.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Clayton, R. (2024). Demostración de la fórmula del seno hiperbólico parte I. Obtenido de <https://pdfcoffee.com/demostracion-de-la-formula-del-seno-hiperbolico-parte-i-1-3-pdf-free.html>

Colomé, P. G. (2010). Fascículo de Funciones hiperbólicas. (F. d. Ingeniería, Ed.) México: Universidad Nacional Autónoma de México. Obtenido de <http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/xmlui/bitstream/handle/132.248.52.100/9321/FASCICULO%20DE%20FUNCIONES%20HIPERBOLICAS.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Escuela Politécnica Nacional. (2024). Obtenido de Studocu: <https://www.studocu.com/ec/document/escuela-politecnica-nacional/geometria/teoremas-geometria-p2/22941746>

Leithold, L. (1998). El cálculo (7ma. Edición ed.). México: OXFORD UNIVERSITY PRESS. Obtenido de [https://kali.azc.uam.mx/clc/03\\_docencia/leithold.pdf](https://kali.azc.uam.mx/clc/03_docencia/leithold.pdf)

content/uploads/2013/01/geometria-moderna-moise.pdf

Stewart, J., Redlin, L., y Watson, S. (2012). Precálculo Matemáticas para el cálculo. Santa Fe, Mexico: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.,. Obtenido de [https://students.aiu.edu/submissions/profiles/resources/onlineBook/k6L8A3\\_precalculo\\_-\\_matematicas\\_para\\_el\\_calculo-1.pdf](https://students.aiu.edu/submissions/profiles/resources/onlineBook/k6L8A3_precalculo_-_matematicas_para_el_calculo-1.pdf)

Swokowski, E. (2009). Cálculo con Geometría Analítica. Mexico: Iberoamericano, S.A. de C.V. Obtenido de <://es.slideshare.net/slideshow/calculo-swokowski/538836243>

Colomé, P. G. (2010). Fascículo de Funciones hiperbólicas. (F. d. Ingeniería, Ed.) México: Universidad Nacional Autónoma de México. Obtenido de <http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/xmlui/bitstream/handle/132.248.52.100/9321/FASCICULO%20DE%20FUNCIONES%20HIPERBOLICAS.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Escuela Politécnica Nacional. (2024). Obtenido de Studocu: <https://www.studocu.com/ec/document/escuela-politecnica-nacional/geometria/teoremas-geometria-p2/22941746>

Leithold, L. (1998). El cálculo (7ma. Edición ed.). México: OXFORD UNIVERSITY PRESS. Obtenido de [https://kali.azc.uam.mx/clc/03\\_docencia/leithold.pdf](https://kali.azc.uam.mx/clc/03_docencia/leithold.pdf)

content/uploads/2013/01/geometria-moderna-moise.pdf

Stewart, J., Redlin, L., y Watson, S. (2012). Precálcula Matemáticas para el cálculo. Santa Fe, Mexico: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.,. Obtenido de [https://students.aiu.edu/submissions/profiles/resources/onlineBook/k6L8A3\\_precalculo\\_-\\_matematicas\\_para\\_el\\_calculo-1.pdf](https://students.aiu.edu/submissions/profiles/resources/onlineBook/k6L8A3_precalculo_-_matematicas_para_el_calculo-1.pdf)

Swokowski, E. (2009). Cálculo con Geometría Analítica. Mexico: Iberoamericano, S.A. de C.V. Obtenido de <://es.slideshare.net/slideshow/calculo-swokowski/53836243>